· Kreisbewegung: $\vec{f} = -m\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{f} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to D = 0$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m \begin{pmatrix} R\cos\omega t \\ R\sin\omega t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega R\sin\omega t \\ -\omega R\cos\omega t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\omega R^2 \end{pmatrix}$$ ist zeitl. konst

(f) Zentralkraftfelder

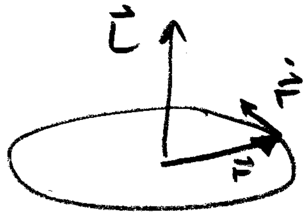
Kraftfelder der Form $\vec{f} = \vec{r} \cdot g(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ sind vom Nullpunkt hin- oder weggerichtet.

Da $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{f}$ und $\vec{r} \times \vec{r} = 0$, ist in einem Zentralkraftfeld der Drehimpuls $\vec{L}$ erhalten.

Es gilt weiterhin: $\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{0}$

$$\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = m \underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}_{\text{Spatprodukt}} = 0 = \vec{r} \cdot \vec{L}$$

→ Bewegung findet in Ebene senkrecht zu $\vec{L}$ statt:



3.4) Probleme mit veränderlicher Masse

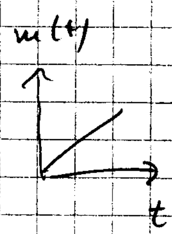
$$\dot{\vec{p}} = \vec{f} \quad , \quad \vec{p} \equiv m\vec{v} = m\dot{\vec{x}}$$

Masse kann sich auch zeitlich ändern:

- Wagen fährt und wird währenddessen beladen
- ~~Rakete hinten weg verbrennt Masse~~
- Regentropfen fällt und gewinnt Masse d. Kondensation

Tropfen bewegt sich durch gesättigten Wasserdampf

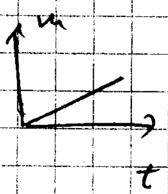
$$\frac{d}{dt}(m\dot{z}) = -mg \quad , \quad m = m(t) = \alpha t$$



$$\dot{m}\dot{z} + m\ddot{z} = -mg$$

$$\dot{m} = \frac{\text{Masse}}{\text{Zeit}}$$ = Rate mit der Masse pro Sekunde anwächst

$$\dot{m} = \text{Konst} = \alpha \Rightarrow m = \alpha t$$



$$\alpha\dot{z} + m\ddot{z} = -mg$$

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + g = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{1}{t}\dot{z} + g = 0$$

Potenzreihenansatz:

$$z = z_0 - \frac{g}{4}t^2$$

Probe:

$$\dot{z} = -\frac{g}{2}t$$

$$\ddot{z} = -\frac{g}{2}$$

$$-\frac{g}{2} + \frac{1}{t}\left(-\frac{g}{2}t\right) + g = 0$$

Der fallende Regentropfen wird stets mit $\frac{g}{2}$ beschleunigt, nicht mit g.

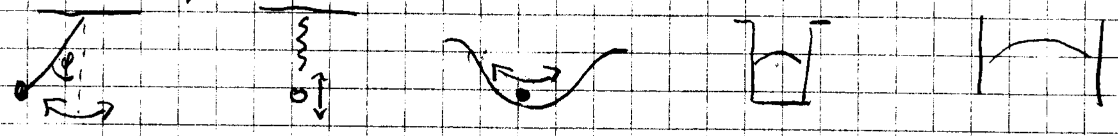
Masse wird: schwerer u. beschleunigter

4. Schwingungen als periodische Bewegungen eines MP – Überblick

4.1. Beispiele von alt bis neumodisch

Beispiele f. Schwingungen: altmodisch → neumodisch

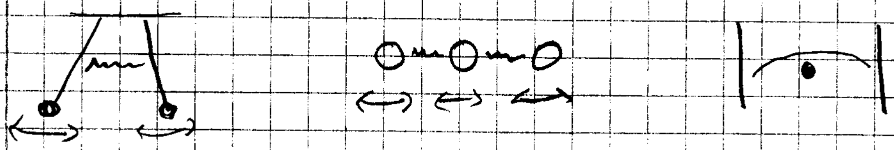
a) einfachen Schwinger



Fadenpendel | Federpendel | rollendes Teilchen | Elektron im Kasten | Photon im Resonator

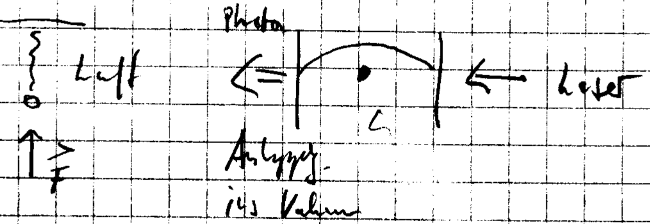
CD-player | Pointer

b) gekoppelte Schwingungen



Federpendel | Ionen im Festkörper | Atom in Resonator (Licht - El - WW)

c) Schwingungen unter Krafteinwirkung und Dämpfung.



Schwingungen von Mechanik bis Quantenmechanik

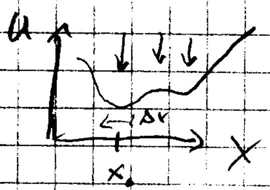
existieren bestimmte Gemeinsamkeiten

4.2 Schwingg. als Grenzfall d. Bewegg. Potentiallandschaft

Bewegg. eines MP in einem Potential $U(\vec r, t)$

$$m\ddot{\vec r} = -\vec\nabla U(\vec r, t)$$

Untersuchg. an ausgezeichneten Stellen, an der Ableitg. verschwindet

1d-Bsp.  , $\partial_x U(x)\big|_{x=x_0} = 0$, $m\ddot x = -\partial_x U(x)$

↳ Schwingg. f. kleine Auslenkg. um x_0 (direkt an Minima angel.)

HA → ↳ Entwicklg. v. U bei x_0 in Taylorreihe:

$$U(x) = U(x_0) + \underbrace{\partial_x U(x)\big|_{x_0}}_{=0} \Delta x + \frac{1}{2}\underbrace{\partial_x^2 U(x)\big|_{x_0}}_{K} \Delta x^2 + \dots$$

$\Delta x = x(t) - x_0$

$$m\ddot x = -\partial_x\left(U(x_0) + \frac{K}{2}\Delta x^2\right)$$

$$m\left(x(t) - x_0 + x_0\right)^{\cdot\cdot} = -\frac{K}{2}\partial_x(\Delta x)^2$$

$$m\,\ddot{\Delta x} = -K\,\Delta x\,\partial_x(x - x_0)$$

$$\boxed{m\,\ddot{\Delta x} = -K\,\Delta x \qquad K = \partial_x^2 U(x)\big|_{x=x_0}}$$

KS verschieben: $x \to x + x_0$

$m\ddot x = -K x$ einfachste Form einer 1d Schwinggsgl.

Beschleunigg.

rückhaltende Kraft proportional zur Auslenkung

(„ – ") (x)

→ drei dimensionale Schwinger:

$$u(\vec r) = u(\vec r_0) + \Delta\vec r\cdot\vec\nabla\, u(\vec r)\Big|_{\vec r_0} + \frac{1}{2}(\Delta\vec r\cdot\vec\nabla)^2\, u(\vec r)$$

$$= u(\vec r_0) + \underbrace{\sum_i \Delta x_i\, \partial_i\, u(\vec r)\Big|_{\vec r_0}}_{=0}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{ij} \Delta x_i\, \Delta x_j\, \partial_i\, \partial_j\, u(\vec r)\Big|_{\vec r=0}$$

einfachstes Bsp. f. Annahme: gemischte Ableitg. $=0$

$$= u(\vec r_0) + \frac{1}{2}\sum_i \Delta x_i^2\, \partial_i^2\, u(\vec r)\Big|_{\vec r=0}$$

$$m\ddot{\vec r} = -\vec\nabla u(\vec r) = -\sum_j \vec e_j\, \partial_j \left(\sum_i \Delta x_i^2\, \frac{1}{2} k_i\right)$$

$$m\ddot{\vec r} = -\sum_{ij} \vec e_j\, \frac{1}{2}k_i\, \frac{\partial}{\partial x_j}\Delta x_i^2 = -\sum_{ij} \vec e_j\, k_i\, \delta_{ij}\, \Delta x_i$$

$m\,\Delta\ddot x_i = -k_i\,\Delta x_i$; Schwinger in jede Kartesische Richtg.

k_i = Konstant $= k$

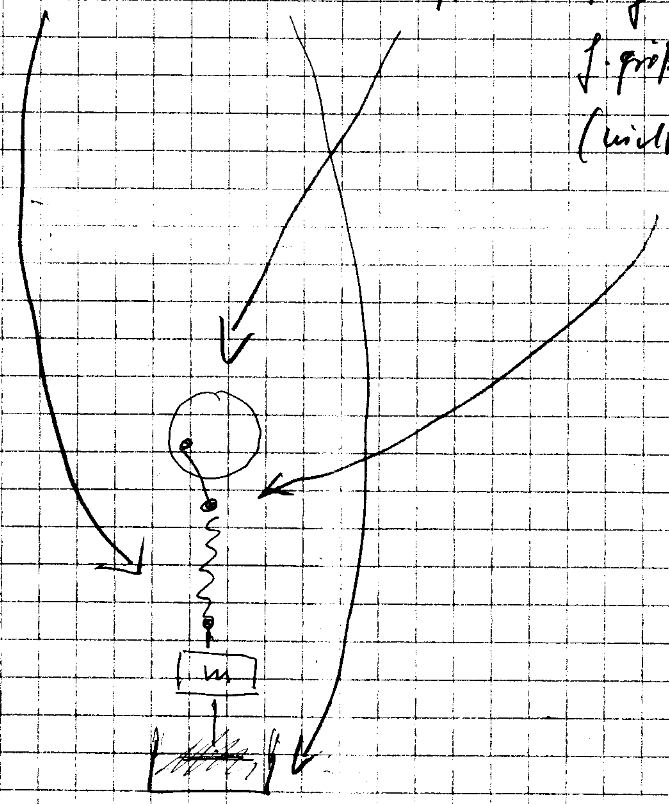
3d. Oszillator

$m\,\Delta\ddot{\vec r} = -k\,\Delta\vec r$ oder $\boxed{m\ddot{\vec r} = -k\,\vec r.}$

4.3. Verallgemeinerungen zur Rückstellkraft

$$\underbrace{m\ddot{x} = -kx}_{\text{Standard Schwing.}} \; \underbrace{- \beta\dot{x}}_{\text{Reibung}} \; \underbrace{+ \vec{f}_{ext}}_{\text{externe Kraft}} \; + \underbrace{k_2 x^2 + \dots}_{\text{nichtlinearer Term v. Taylor in } u}$$

f. große Auslenkung relevant
(nichtlineare Optik)



5. Freie harmonische Schwingungen

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

mit $\omega_0^2 = \frac{k}{m} \equiv$ Schwingungsfrequenz

homogene, lineare Dgl. 2. Ordnung ⇒ 2 Fundamentallsg. aus $e^{\lambda t}$ Ansatz

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{\lambda t}\right) + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$$

2 Lsg.

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{1/2} = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm i\omega_0$$

Die beiden Fundamentallsg. lauten $e^{\pm i\omega_0 t}$.

$$x = \alpha_1 e^{+i\omega_0 t} + \alpha_2 e^{-i\omega_0 t}$$

spezielle Lsg. muß α_1, α_2 durch AB festgelegt werden:

$$x(t_0) = x_0 \,, \quad \dot{x}(t_0) = v_0$$

$$x_0 = \alpha_1 + \alpha_2 \,, \quad v_0 = i\omega_0\alpha_1 - i\omega_0\alpha_2 \,, \quad \frac{v_0}{i\omega_0} = \alpha_1 - \alpha_2$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{v_0}{i\omega_0}\right), \quad \alpha_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{v_0}{i\omega_0} - x_0\right)$$

$\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ $\quad \beta + \alpha$

$$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t = \underbrace{A \sin(\omega_0 t + \varphi)}$$

allg. Lsg. stellt Überlagerung v. sin, cos bzw sin/cos mit Phasenverschiebung dar, abhängig v. AB.

$$A = \left[x_0^2 + \left(v_0/\omega_0\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\tan\varphi = \left[\frac{x_0}{v_0}\omega_0\right]$$

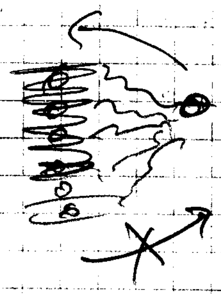
6. Wie entsteht Reibung?

bisher ideale Oszillatoren, wissen:
durch WW mit Umgebung (Luft, Flüssigkeit usw) kommt
Oszillator zur Ruhe wenn nicht ständig angeschoben.

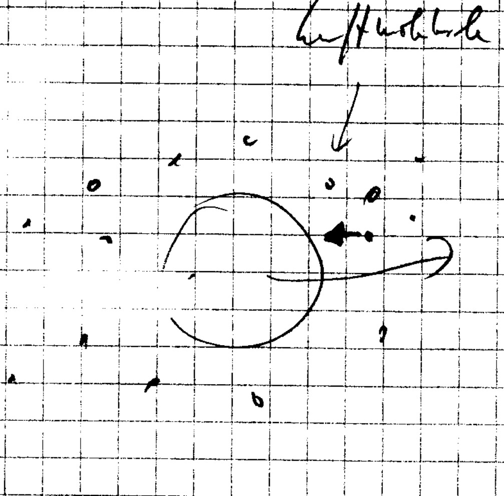
? einfaches Modell f. Reibg. ist nötig

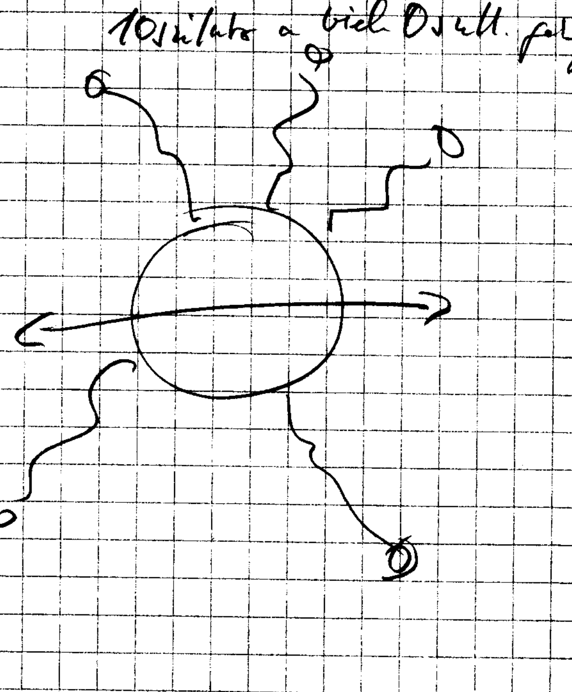
unterteilen Welt in $\boxed{\text{System + Umgebung}}$
System: Oszillator m
Umgeb.: viele umgebende Objekte (Luft, andere Oszillatoren)
Masse m.

tiefliegendes Problem: legt auch Zeitrichtg. fest



2 Modelle:





$\boxed{\text{Zeitrichtungsproblem!}}$