III Himmelsmechanik

1.) Wie entwickelte Newton die Gravitationskraft?

Kreisbewegung: $\vec{r} = R(\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$ Ort

$\dot{\vec{r}} = \omega R(-\sin\omega t, \cos\omega t, 0)$ Geschwindigkeit

$\ddot{\vec{r}} = -\omega^2 R(\cos\omega t, \sin\omega t, 0)$ Beschleunigung

$\rightarrow \quad v = |\dot{\vec{r}}| = \omega R$

$a = |\ddot{\vec{r}}| = \omega^2 R = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \frac{v^2}{R}$ Betrag der Beschleunigung

natürlich wußte Newton, daß Planeten sich nicht auf Kreisbahnen bewegen, aber verwendete Kreisbahn als Ansatz und kombinierte es mit dem Keplergesetz $T \sim R^{3/2}$

$\underset{\text{Umlaufzeit}}{T} \sim \underset{\text{Abstand}}{R}^{3/2}$

$$v = \frac{2\pi R}{T} \sim \frac{R}{T} \sim \frac{R}{R^{3/2}} \sim \frac{1}{R^{1/2}}$$

Kreisbahn

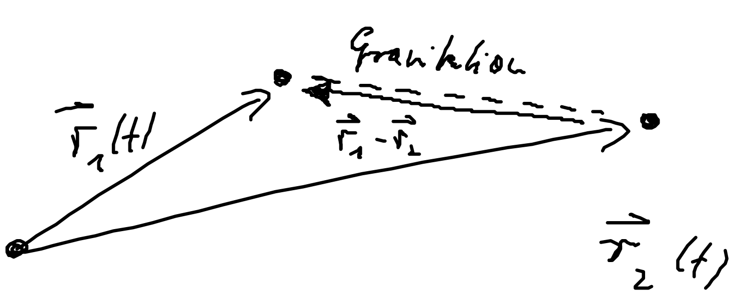
→ durch Einsetzen in a:

$$a \sim \frac{v^2}{R} \sim \left(\frac{1}{R^{1/2}}\right)^2 \frac{1}{R} \sim \frac{1}{R^2}$$

Beschleunigung und Kraft sind proportional $\frac{1}{R^2}$, wobei R Abstand zwischen Körper und „Gravitationszentrum".

2. Zweikörperproblem

- Massepunkte (2) über Gravitation miteinander wechselwirkend.
- Später über Feldtheorie der Gravitation kann MP-Ansatz verstanden werden



$\vec{r}_1(t) = ?$

$\vec{r}_2(t) =$

Kraft auf $\vec r_1(t)$ durch $\vec r_2(t)$

$$\vec f_{1\leftarrow 2} = G\, m_1 m_2 \frac{\vec r_2 - \vec r_1}{|\vec r_1 - \vec r_2|^3} \sim \frac{1}{R^2}$$

Gravitations-Konstante Masse

Vorzeichen stellt Anziehung sicher

$$\vec f_{2\leftarrow 1} = G\, m_1 m_2 \frac{\vec r_1 - \vec r_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|^3}$$

damit sind die Newton Bewegungsgleichungen:

$$\cancel{m_1}\ddot{\vec r}_1 = G \cancel{m_1} m_2 \frac{\vec r_2 - \vec r_1}{|\vec r_1 - \vec r_2|^3}$$

$$\cancel{m_2}\ddot{\vec r}_2 = G m_1 \cancel{m_2} \frac{\vec r_1 - \vec r_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|^3}$$

Symmetrie legt nahe: neue Koordinate $\vec r = \vec r_1 - \vec r_2$

Herleitung einer Gleichung f. diese Koordinate:

$$\ddot{\vec r} = -G \frac{\vec r_1 - \vec r_2}{|\vec r_1 - \vec r_2|^3} \underbrace{(m_1 + m_2)}_{M \text{ Gesamtmasse}}$$

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = -GM \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}}$$ ist ein dreidimensionales Problem

um die verbleibend 3 Koordinat zu beschreibe,

führt man die Schwerpunkt $\vec{R}$ ein:

$$M\vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$$

Koordinat trafo: $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \Longrightarrow \vec{r}, \vec{R}$

die Gleichunge für $\vec{r}, \vec{R}$ sind entkoppelt.

<u>Schwerpunktkoordinate:</u>

siehe oben

$$M\ddot{\vec{R}} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

auf den Schwerpkt. wirkt keine Kraft!

$$M\dot{\vec{R}} = \text{konst} \longrightarrow \vec{R} = v_R t + \vec{R}_0$$

bewegt sich gleichförmig

umkehrg. der Koordinat trafo:

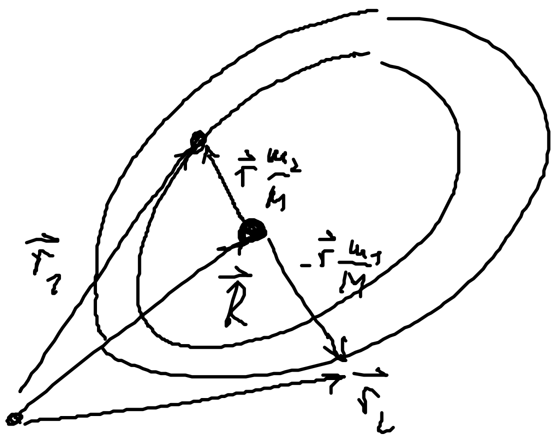
$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad M\vec{R} = m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2$$

→ umstellen nach $\vec r_1, \vec r_2$

$$\vec r_1 = \vec R + \frac{m_2}{M}\vec r$$

$$\vec r_2 = \vec R - \frac{m_1}{M}\vec r$$

Gesamtbild:



Die Körper bewegen sich auf Bahnkurve $\vec r(t)$ um den Schwerpunkt $\vec R$.

Das Zweikörperproblem ist damit auf ein Einkörperproblem ($\vec r$) reduziert.

zu lösen ist $$\ddot{\vec r} = -G M \frac{\vec r}{|\vec r|^3}$$

μ μ

oft wird hier reduzierte Masse μ dran multipliziert

Bemerkung zur reduzierten Masse

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2}$$

$$= \frac{m_1}{2}\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\vec{r}}\right)^2 \quad \text{, ausmultiplizieren}$$

$$= \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^{\,2}$$

T läßt sich darstellen als Summe v. Relativgeschw. mit reduzierter Masse μ und Schwerpunktsgeschwindigkeit mit Gesamtmasse M

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

Bemerkung: $m_2 \gg m_1$ Sonne – Planet – Problem
(m_2) (m_1)

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \vec{r}_2 = v_s\, t = 0$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{\cancel{m_1} + m_2} = m_1$$

Im Grenzfall $m_2 / m_1 \to \infty$

mit der Sonne im Koordinatenursprung

und die Bewegg $\vec{r}$ des Planet um die Sonne.

2. Lösung d. Gravitationsproblems

$$\vec{f} = -\mu M G \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$ Gravitationskraft

2.1. Erhaltungssätze f. Bewegung im Gravitationfeld

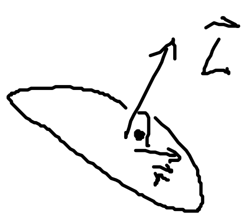
a) $\vec{f}$ ist ein Zentralkraft weil $\vec{f} \sim \vec{r}$

es gilt Drehimpulserhaltung $\underbrace{\vec{r} \times \vec{f}}_{\text{Drehmoment } \vec{D}} = 0 \rightarrow \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \text{Konstant}$

b) wenn $\vec{L}$ = Konstant ist, so bewegt sich der MP in einer Ebene

i.a. gilt : $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$ immer !

wenn $\vec{L}$ aber Konstant, steht der Vektor fest im Raum

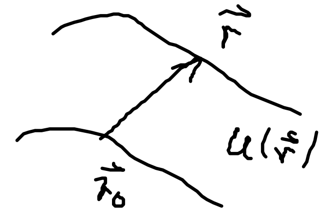


$\Rightarrow$ $\vec{r}$ bewegt sich in Ebene $\perp$ zu $\vec{L}$ = Konst $\Rightarrow$ 2d Problem

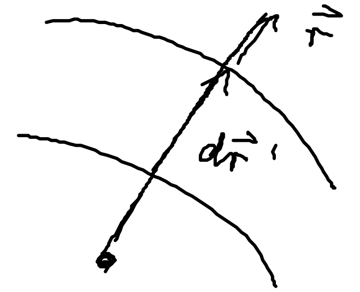
c) es gilt Energieerhaltung :

Gravitationskraft hat Potential → E-Erhaltg.

($\vec{\nabla} \times \vec{f} = 0$, Ü A)



$$U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \vec{f}(\vec{r}\,')$$



$$= \mu M G \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}\,' \cdot \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|^3}$$

$$= \mu M G \int_{r_0}^{r} dr' \, \frac{r'}{r'^3}$$

$$= \mu M G \int_{r_0}^{r} dr' \, \frac{1}{r'^2} = -\mu M G \left(\frac{1}{r} - \cancel{\frac{1}{r_0}} \right)$$

weglassen weil Konst.

Stichwort: Eichung v. Potentialen,
siehe ED (III)

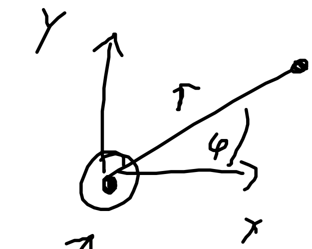
→ Energieerhaltung $E = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^{\,2} + U(\vec{r})$

kinetische Energie
m: Masse Planeten

potentielle Energie,
Konstruiert!

Auswertung :

zu a) Drehimpulserhaltung :



$\vec L \perp$ auf Ebene

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \vec{r} \times \vec{v} = m \underline{\underline{\vec{r}}} \times \underline{\underline{\dot{\vec{r}}}}$$

$$\vec{r}(t) = (r\cos\varphi ,\ r\sin\varphi ,\ 0)$$

ebene Polarkoordinaten

wisse: Bewegg. in Ebene r, φ, und $z = 0$ $\qquad r = r(t)$, $\varphi = \varphi(t)$

$$\dot{\vec{r}}(t) = (\dot r\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot\varphi ,\ \dot r\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot\varphi ,\ 0)$$

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x & y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= m\vec{e}_z\,(x v_y - y v_x)$$

$$= m\vec{e}_z\,\Big(\cancel{r\cos\varphi\,\dot r\sin\varphi} + r^2\cos^2\varphi\,\dot\varphi - \big(\cancel{r\dot r\cos\varphi\sin\varphi} - r^2\sin^2\varphi\,\dot\varphi\big)\Big)$$

$$\vec{L} = m\vec{e}_z\, r^2\dot\varphi = \text{konstant}$$

$\vec{L}$ hat wie erwartet nur eine z-Komponente

$$L_z = m r^2 \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{L_z}{m r^2}$$

<u>zu c) Anwendung E-Satzes</u>

$$E = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 + U(r)$$

kann als Dgl. für $\dot{\vec{r}}$ interpretiert werden

ausdrücken in Polarkoordinaten r, φ:

$$\dot{\vec{r}}^2 = v_x^2 + v_y^2 + 0^2 =$$

$$= (\dot{r} \cos\varphi - r \sin\varphi \, \dot{\varphi})^2 + (\dot{r} \sin\varphi + r \cos\varphi \, \dot{\varphi})^2$$

$$= \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \quad \text{mit} \quad \dot{\varphi} = \frac{L_z}{m r^2}$$

$$= \dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{m^2 r^2}$$

in E-Satz einsetzen:

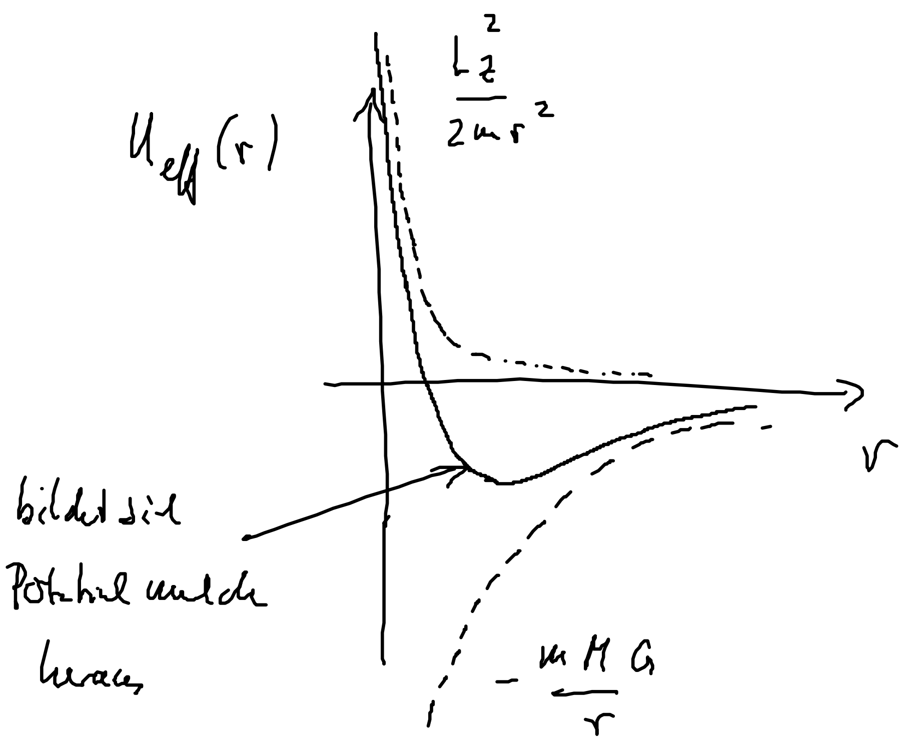
$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$$

diese Gleichung hängt nur noch von r ab!

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

kann als Bewegg. eines MP im effektiven Potential U_{eff} gesehen werden:

$$U_{eff} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Drehimpuls-} \\ \text{potential}}}{\frac{L_z^2}{2mr^2}} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gravitations} \\ \text{potential}}}{\frac{GmM}{r}}$$



Übungszettel Aufgabe 7 Korrektur:

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{G m m_s}{r}$$