Nachtrag zum 3. Keplergesetz:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\left(\frac{2m}{L_z}\right)^2 a^2 b^2 \pi^2}{a^3} = \frac{\left(\frac{2m}{L_z}\right)^2 \pi^2 b^2}{a} \quad \Bigg\} \text{ stand an Tafel}$$

mittels $K = \frac{a^2 - e^2}{a} = \frac{b^2}{a}$.

aus der Ableitung der Ellipsengleichung

und $K = \frac{L_z^3}{G m^2 M}$ aus Ableitg. $r = r(\varphi)$ folgt:

$\frac{T^2}{a^3}$ = Konstant weil in K nur noch Konstanten vorkommen

→ für Planete 1 und 2 gilt:

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} \quad \text{(3. Kepler)}$$

IV Inertialsysteme, beschleunigte Bezugssysteme

Inertialsystem: Koordinatensystem in dem die Newtonaxiome gelten, insbesondere gilt die Newtongleichung (muß getestet werden)

Koordinatentrafo: setzt 2 Beobachter voraus, jeder der Beobachter hat ein eigenes Koordinatensystem

Beobachter 1: Σ  $\vec{r}$

Beobachter 2 Σ'  $\vec{r}\,'$

Die Umrechnung zwischen beiden Systemen ist eine Koordinatentrafo

Bemerkungen:

a) nicht alle KS sind Inertialsysteme
in beschleunigten Bezugssystemen $\exists$ Scheinkräfte

b) es existiert ein Inertialsystem: Fixsternhimmel (

c) aus einem Inertialsystem entstehen weitere, wenn sich die Newtongleichung beim Übergang von $\Sigma \to \Sigma'$

nicht verändert

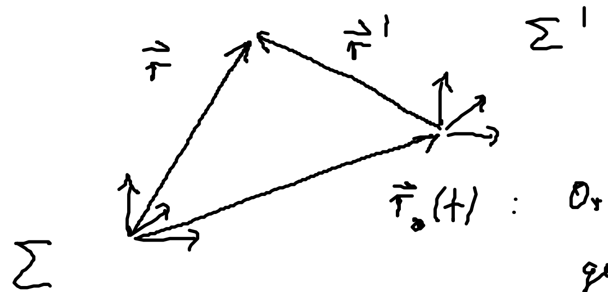
Inertialsystem Σ $\xrightarrow{\text{Trafo}}$ Σ'

$m\ddot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ $\qquad$ $m\ddot{\vec{r}}' = \vec{f}(\vec{r}', \dot{\vec{r}}', t)$

wenn gültig,
so wird Inertialsystem

<u>Sprechweise</u>: Die Newtongleichung bleibt invariant (ändert Form nicht) unter Koordinatentrafo

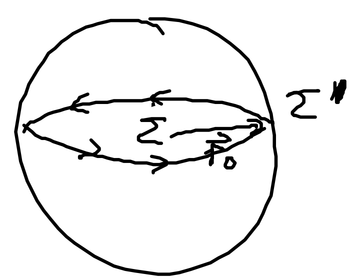
1.) Translation von Koordinatensystemen



$\vec{r}_0(t)$: Ortsvektor von Σ zu Σ'
gemessen in Σ (Bahnkurve von Σ')

Drehung der Achsen zunächst verboten

<u>Bsp. Erde</u>



$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}'(t)$

<u>Trafo</u> : $\vec{r} \to \vec{r}'$, $t \to t'$

Besonderheit: Invarianz d. Grundgesetze, wenn

$$\vec{r}_0 = \vec{v}_0\, t \quad \text{(gleichförmig geradlinig)}$$

ist zu zeigen:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad \text{gilt in } \Sigma \text{ als Inertialsystem}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \underbrace{\ddot{\vec{r}}_0}_{=0} + \ddot{\vec{r}}\,' \quad \text{um umzurechnen nach } \Sigma'$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}\,' \quad \text{Beschleunigungen sind identisch}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}\,'$$

$$\underbrace{\vec{f}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)}_{} = m\ddot{\vec{r}}\,'$$

wie wird die Kraft transformiert

Gravitation hängt von Abstände ab: $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = v_0 t + \vec{r}_1\,' - v_0 t - \vec{r}_2\,'$

$$= \vec{r}_1\,' - \vec{r}_2$$

$$\vec{f}(\vec{r}\,', \dot{\vec{r}}\,', t) = m\ddot{\vec{r}}\,'$$

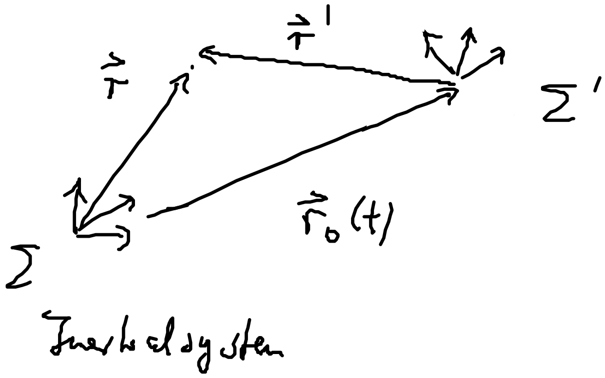
Es gilt in Σ' das Newtongesetz.

Für jedes $\vec{v}_0 \neq 0$ kann man ein weiteres Inertialsystem finden.

Galileisches Relativitätsprinzip

Es gibt ∞ viele Inertialsysteme die sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander fortbewegen.

2.) Beliebig beschleunigte Koordinatensysteme



$\vec{r}_0(t)$ beliebig in t

+ Rotation d. Systems Σ' mgl.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}\,'(t)$$

Idee: Korrekturen zum Newtongesetz berechnen

bis zur 2. Zeitableitung verarbeiten

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}_0(t) + \dot{\vec{r}}\,'(t) \quad , \quad \text{wissen: } \vec{r}\,'(t) = \sum_i x_i'(t)\, \vec{e}_i\,'(t)$$

$$= \dot{\vec{r}}_0(t) + \sum_i \left(\dot{x}_i' \, \vec{e}_i' + x_i' \, \dot{\vec{e}}_i' \right)$$

Translationsgeschwindigkeit Ursprungs v. Σ'

Geschwindigkeit die Beobachter in Σ' feststellt

verursacht Scheinkräfte (Drehung)

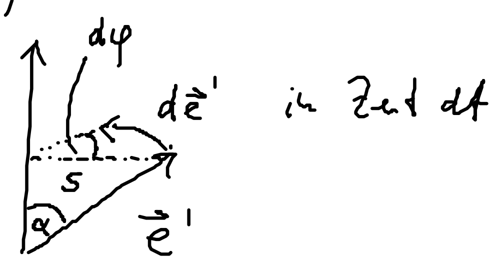
durch Drehung sind Einheitsvektoren zeitabhängig.

$$\dot{\vec{e}}_i = ?$$

Einführung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}(t)$

die die Drehg. v. Σ' beschreibt.

$\vec{\omega}(t)$



$\vec{\omega}(t)$: Drehachse, $\dfrac{\text{Umlauf in Bogenmaß}}{\text{Zeit}}$

$$d\vec{e}' = \underbrace{s \, d\varphi}_{\text{Betrag d. Bogenstücks das durchlaufen wird}} \vec{f}_0 \,, \quad \vec{f}_0 \text{ Einheitsvektor in Richtg.} \perp \vec{\omega}, \vec{e}'$$

$$d\vec{e}' = \underbrace{|\vec{e}'| \sin\alpha}_{} \; d\varphi \; \vec{f}_0$$

5

$$\frac{d\vec{e}\,'}{dt} = \sin\alpha \, \frac{d\varphi}{dt} \, \vec{f}_0$$

α ist $\sphericalangle$ zwisch $\vec{e}\,'$ und $\vec{\omega}$

Betrag v. $|\vec{\omega}|$

Vektor der steht $\perp$ auf $\vec{e}\,'$, $\vec{\omega}$

Def. d. Kreuzprodukts

$$\frac{d\vec{e}\,'}{dt} = \vec{\omega}(t) \times \vec{e}\,'$$

$$\rightarrow \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}\,' + \underline{\vec{\omega} \times \vec{r}\,'}$$

nur für Beobachter im Σ'-System

$$\sum_i \dot{x}_i' \vec{e}_i\,'$$

bei Umrechnung v. Zeitableitungen:

$$\frac{d}{dt} \cdot = \frac{d}{dt'} \cdot + \vec{\omega} \times \cdot$$

in Σ in Σ'

Newtongesetz f. beschleunigtes Bezugssystem

$$\ddot{\vec r} = \ddot{\vec r}_0 + \ddot{\vec r}'$$ geht über in:

$$\ddot{\vec r} = \ddot{\vec r}_0 + \ddot{\vec r}' + \vec\omega\times\dot{\vec r}' + \underline{\dot{\vec\omega}\times\vec r' + \vec\omega\times\dot{\vec r}'}$$
$$\underline{+\,\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')}$$

in Σ beschrieben

eingeprägte Kraft

$$\frac{\vec f(\vec r',\dot{\vec r}',t)}{m}$$ + umstellen nach $\ddot{\vec r}'$

$$\boxed{m\ddot{\vec r}' = \vec f(\vec r',\dot{\vec r}',t) - m\ddot{\vec r}_0 - 2m(\vec\omega\times\dot{\vec r}') - m(\dot{\vec\omega}\times\vec r') - m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r')}$$

„korrigierte Newtongleichg. in Σ'“ f. dortige Beobachter

- Beschleunigg. im Σ'
- Kraft die auf MP $\vec r'(t)$
- Kraft die durch Bewegg. d. Ursprungs
- Corioliskraft $\neq 0$ für $\dot{\vec r}'=0$
- Winkelbeschleunigungskraft
- Zentrifugalkraft

Scheinkräfte, bzw Trägheitskräfte

Sind von beschleunigter Bewegg. d. KS vorgetäuscht (Scheinbar)

Sorgt dafür, daß im I-System das Trägheitsgesetz gilt

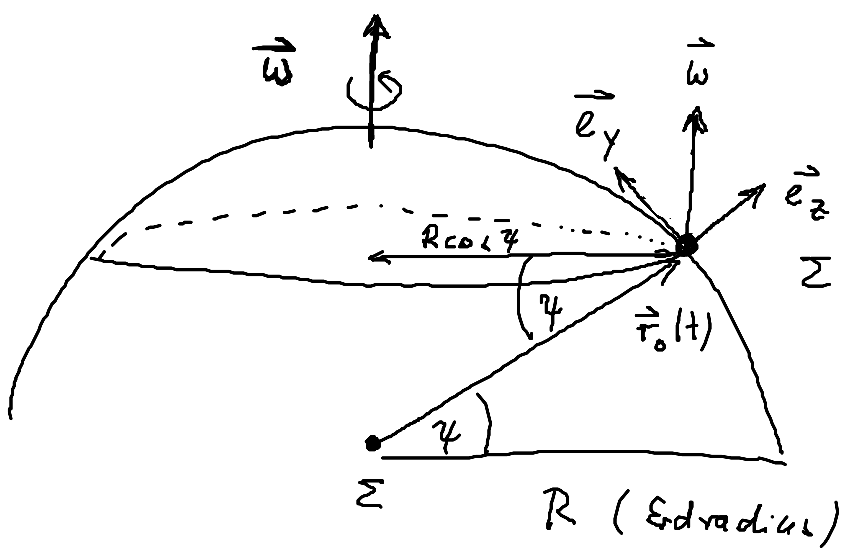
3. Bewegung auf rotierender Erde

3.1. Scheinkräfte

ω = zeitlich Konstant $= \frac{2\pi}{Tag} \sim 7 \cdot 10^{-5}/s$

$\vec{r}\,' \to \vec{r}$

in Tafelebene : $\vec{e}_x$



Winkelbeschleunigungskraft $\sim \dot{\vec{\omega}} = 0$

$$\ddot{\vec{r}} = -g\vec{e}_z - \ddot{\vec{r}}_0 - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$$

gerade Bahnkurve in Σ' der Erde

Gravitation in Erdnähe

Ursprg v. Σ' auf Kreisbahn

Zentrifugalkraft

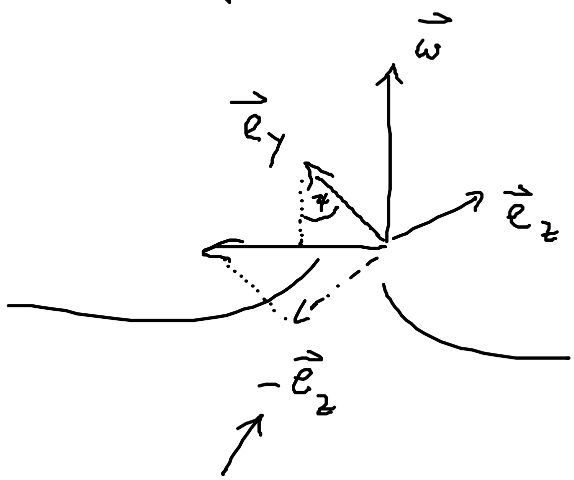
Corioliskraft

a/ Bewegg. mit $\ddot{\vec{r}}_0$

$$\left|\ddot{\vec{r}}_0\right| = \text{Kreisbewegg.} = \omega^2 R \cos \varphi$$

Richtung festlegen

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \omega^2 R \cos \varphi \left(0, \sin \varphi, -\cos \varphi\right)$$



$\vec{e}_y$: $\sin \varphi$

Kraft muß nach innen wirken, ist durch Einheitsvektor mal Betrag