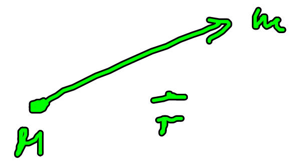
2.3. Beispiele für Lagrangegleichungen 2. Art

a) Keplerproblem (ÜA 15)

feststehende Sonne M, Planet m



$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^2 + \frac{GmM}{r} \quad \text{in Kugelkoordinaten}$$

$$\vec r = r\,\vec e_r \;\Rightarrow\; \dot{\vec r} = \dot r\,\vec e_r + r\dot\vartheta\,\vec e_\vartheta + r\sin\vartheta\,\dot\varphi\,\vec e_\varphi$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2\right) + \frac{GmM}{r}$$

$$q_i = \{r, \vartheta, \varphi\} \quad \text{für} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r\dot\vartheta^2 + m r\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2 - \frac{GmM}{r^2}\;;\quad p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\dot r$$

usw.

(i) zur Festlegung d. Drehimpulses: p_φ berechnen, mit $L_z = [m\,\vec r \times \dot{\vec r}]_z$ vergleichen.
($x = r\sin\vartheta\cos\varphi$
$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$)

(ii) wähle nun $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (warum mgl.!?)

(i, ii) $\to$ führt zur Bahngleichung d. Keplerproblems

b) Teilchen im elektromagnetischen Feld (ÜA 17)

$$\vec f_L = q\left(\underbrace{\vec E(\vec r, t)}_{\text{elektr. Feld}} + \vec v(t) \times \underbrace{\vec B(\vec r, t)}_{\text{magnet. Feld}}\right) \quad \text{Lorentzkraft}$$

Ziel: L auffinden, welches die Lorentzkraft in den Newtongl. reproduziert

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{f}_L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \quad , \; L = T - V$$

kennen: $T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2$

Darstellg. von V über $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$, $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

E, B wird auf 2 andere Felder zurückgeführt:

Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r}, t)$

Skalar Potential $\phi(\vec{r}, t)$

$$V = V(\vec{A}, \phi)$$

$S(L)$

Richard Feynman:

"The question of what the action should be ... must be determined by some kind of trial and error ... you have to fiddle around."

L muß geraten werden bzw $\underline{\underline{V}}$

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 \underbrace{- q\phi}_{} + \underline{q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}}$$

potentielle Energie
im Potential

diese Lagrangefunktion erzeugt die richtige Bewegungsgleichungen

wir reproduzieren sie die Lorentzkraft:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$$ in kartesischen Koord. berechnen $x_i = \{x, y, z\}$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -q\frac{\partial}{\partial x}\phi + q\,\dot{\vec{r}}\cdot\left(\partial_x A_x, \partial_x A_y, \partial_x A_z\right)$$

„produktive Null": addiere von Termen wie:

$$0 = \dot{y}\,\partial_y A_x - \dot{y}\,\partial_y A_x$$

$$0 = \dot{z}\,\partial_z A_x - \dot{z}\,\partial_z A_x$$

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$= -q\,\partial_x\phi + q\left(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{\nabla}\right)A_x + q\left[\dot{\vec{r}}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)\right]_x$$

dazu Aufgabe 17a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} + q\frac{d}{dt}A_x$$

aufsammeln aller Terme:

$$m\ddot{x} = q\left(E_x(\vec{r},t) + \left[\dot{\vec{r}} \times \vec{B}(\vec{r},t)\right]_x\right)$$

→ Lorentzkraft lässt sich reproduzieren

2.4. Euler-Lagrange-Technik für Vielteilchensysteme

die Darstellg. und das Rechnen mit Wirkg S

hatten wir über $\{q_i\}_{i=1,2,3}$ f. 1. Teilchen bisher.

Rechng. legt sich aber nicht auf 1 Teilchen fest.

$$L = T(\dot{x}_{ni}) - V(x_{ni})$$

i-te Koordinate n-ten Teilchens

x_{23} : z-Koordinate des 2.ten Teilchens

$$x_{ni} \rightarrow q_j \quad \text{nennen}$$

$$(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22} \dots) \qquad (q_1, q_2, q_3, q_4 \quad \dots)$$

damit gelten die L-2 Art auch für viele Koordinaten

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad i = 1 \dots 3N$$

bei N Teilchen

Beispiel: viele Teilchen die über Gravitation wechselwirken

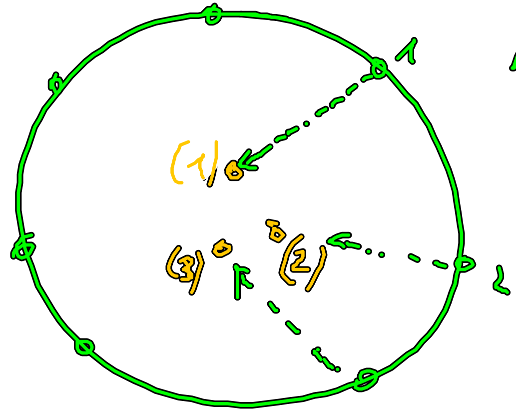
$$T = \sum_{n}^{N} \frac{m_n}{2} \dot{\vec{r}}_n^{\,2} \qquad V = ?$$

Summe über alle N Teilchen

n - Summationsindex

es verbleibt V zu bestimmen

überlegen uns welche potentielle Energie in Massenverteilg. steckt:



Kugel im ∞ entfernt
Teilchen liegen darauf sind frei

jetzt: schrittweiser Aufbau des Systems im endlichen und dabei berechnen der Energie E

- erste Masse: $\Delta E = 0$, hat dieselbe Energie wie im ∞

- zweite Masse: m_1 ist schon da!

$$\Delta E = \Delta V_1 = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

- dritte Masse: m_1, m_2 sind da

$$\Delta E = \Delta V_2 = -\frac{G m_1 m_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} - \frac{G m_2 m_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|}$$

- n-te Masse:

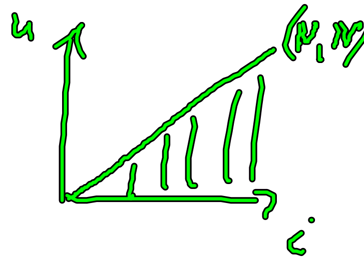
$$\Delta E = \Delta V_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-G m_i m_n}{|\vec{r}_i - \vec{r}_n|}$$

die gesamte angehäufte potentielle Energie ist:

$$V = -\sum_{k=1}^{N} \sum_{i<k} \frac{G m_i m_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{i=1 \\ k \neq i}}^{N} \frac{G m_i m_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$$

Doppelzählungen verhindern



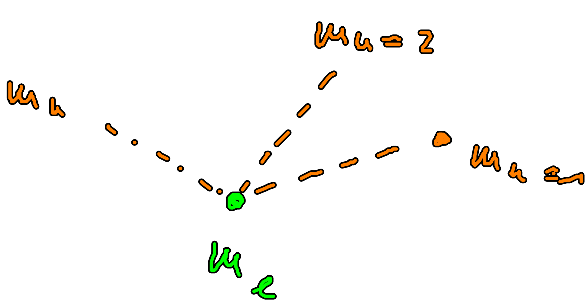
ÜA 16: Lagrangefunktion ww. Teilchen Gravitation

$$L = T - V = \sum_{k i} \frac{m_k}{2} \dot{x}_{ki}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,m}^{N,N} \frac{G m_k m_m}{|\vec{r}_k - \vec{r}_m|}$$

kartesische Koordinaten

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ej}} \; , \; \frac{\partial L}{\partial x_{ej}} \longrightarrow \text{einsetzen in Lagrange 2. Art}$$

$$m_e \ddot{x}_{ej} = -G m_e \sum_k \frac{m_k (x_{ej} - x_{kj})}{|\vec{r}_e - \vec{r}_k|^3}$$



Summe der einzelnen Kräfte

2.5. Euler-Lagrange Technik f. Felder

2.5.1. Feldgleichungen d. Analogieschluß

Teilchen $\vec{r}(t)$

Koordinate $q_i(t)$

Variable $\underline{t}$

$$S = \int \underline{dt}\, L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$$

Feld $\vec{\phi}(\vec{r}, t)$

Koordinate ϕ_i

Variable: $t, \underline{\vec{r}}$

$$S = \int dt \int \underline{d\vec{r}^3}\; \mathcal{L}(\phi_i, \dot{\phi}_i, \phi_{i/j}, t)$$

Lagrangedichte wie $1/V$ zusätzlich

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial}{\partial t}\phi_i, \quad \phi_{i/j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\phi_i$$

Wirkprinzip $\delta S = 0$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}$$

$\delta S = 0$

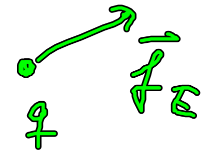
$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i/j}}}$$

$$L = T - V$$

oder „you have to fiddle around…" $\longrightarrow$ you have to fiddle around

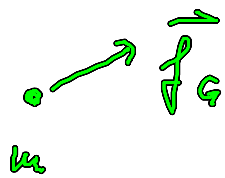
2.5.2. Das Gravitationsfeld

analog zum elektrische Feld $\vec{E} = \frac{\vec{f}_E}{q}$



wird Gravitationsfeld eingeführt:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{f}_G}{m}$$



2 wichtige Zusammenhänge:

a) $\vec{f}_G = -\vec{\nabla}\varphi$ Gravitationskraft kann als Gradient eines Potentials dargestellt werden

$\vec{g} = -\vec{\nabla}\frac{\varphi}{m}$ mit Probemasse

$\vec{g} = -\vec{\nabla}\varphi$ „$\varphi \rightarrow \frac{\varphi}{m}$"

b) $\varphi = -\sum_n \frac{G m_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|}$ Gravitationspotential φ

das der Massepunkt m bei $\vec{r}$ verspürt, kann durch

$$\boxed{\Delta \varphi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})} \quad , \quad \rho(\vec{r}) = \sum_n m_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n)$$

Massedichte

Laplaceoperator

berechnet werden

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

man kann also φ auch durch Lösung der Potentialgleichung $\Delta \varphi = 4\pi G \rho$ finden

Beweis ÜA, Tutorium

Ziel: $\mathcal{L}$ für das Gravitationsfeld aufzuschreiben

wissen: $$V = -\frac{1}{2} \sum_{n,i}^{N\,N} \frac{G m_i m_n}{|\vec{r}_i - \vec{r}_n|} \overset{!}{=} f(\vec{g})$$

potential E einer Massenverteilung

Wenn es gelingt $\vec{g}$ in $V = V(\vec{g})$ einzuführen,

so hat man eine Lagrangedichte $\mathcal{L}$ f. $\vec{g}$.

$$V = -\frac{G}{2}\int d^3r \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec r)\,\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

mit Hilfe der Massedichteformel $\rho(\vec r)$

$$\rho = \frac{\Delta\varphi}{4\pi G} = \frac{1}{4\pi G}\left(\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\varphi)\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi G}\left(\vec\nabla\cdot\vec g\right)$$

einsetzen in V für $\rho(\vec r\,')$

partielle Integration bzgl $\vec r\,'$

$$V = \frac{1}{8\pi}\int d^3r\,\rho(r)\int \frac{d^3r'\,\vec\nabla'\cdot\vec g(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int d^3r'\,\vec g(\vec r\,')\cdot\int d^3r\,\rho(\vec r)\left[-\vec\nabla'\,\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}\right]$$

Ableitung d. Potentials

Randterm verschwinden

$$= -\frac{1}{8\pi G}\int d^3r'\,\vec g(\vec r\,')\cdot\vec g(\vec r\,')$$

damit ist $V = V(\vec g)$

man stellt sich jetzt vor daß Feld hat „Eigenleben" hat
und abstrahiert v. Masseverteilung ρ

a) im freien Raum

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{8\pi G}\underbrace{\vec{g}(\vec{r})}_{-\vec{\nabla}\varphi}\cdot\underbrace{\vec{g}(\vec{r})}_{-\vec{\nabla}\varphi} = -\frac{1}{8\pi G}\sum_i(\partial_i\varphi)^2$$

$\uparrow$

Feld

wähle als Feld das Gravitationspotential φ

$$\frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial\varphi}=0,\quad\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_{,j}} = -\frac{1}{8\pi G}\sum_i 2(\partial_i\varphi)\underbrace{\frac{\partial\varphi_{,i}}{\partial\varphi_{,j}}}_{\delta_{ij}} = -\frac{1}{4\pi G}\partial_j\varphi$$

$$\varphi_{,j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial\dot{\varphi}} + \sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\mathcal{L}_F}{\partial\varphi_{,j}}$$

$$0 = 0 - \frac{1}{4\pi G}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\,\partial_j \varphi = -\frac{1}{4\pi G}\sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\,\varphi$$

$$\boxed{\Delta\varphi = 0}$$

Gravitationsfeldgleichung im freien Raum

b) Raum mit Massenverteilung

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \underbrace{\mathcal{L}_{F-T}}$$

T - Teilchen mit Masse

$$L_{F-T} = -\sum_n m_n \underbrace{\varphi(\vec r_n)}_{\text{potentielle Energie d. Teilchen } \vec r_n \text{ im Feld } \varphi} \qquad (-V)$$

$$= -\int d^3r \underbrace{\sum_n m_n\, \delta(\vec r - \vec r_n)}_{\rho(\vec r)}\, \varphi(\vec r)$$

$$= -\int d^3r\, \rho(\vec r)\, \varphi(\vec r)$$

$$\mathcal{L}_{F-T} = -\rho\varphi$$

in den Lagrange gl. wird $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \neq 0$, alle anderen bleibt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\rho$$

Newton – Gravitationsfeld gleichung

damit erhält man $\boxed{\Delta \varphi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})}$

partielle Differential gleichung wenn $\rho(\vec{r})$ vorgegeben ist

auch für ausgedehnte Objekte anwendbar