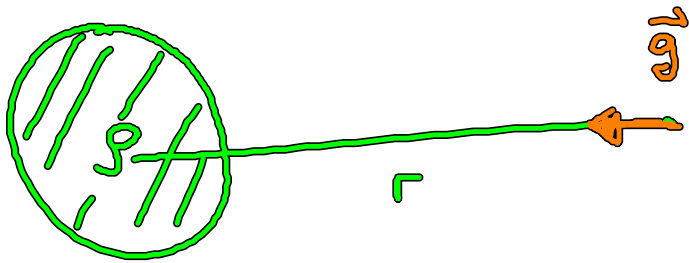


2.5.3 Lösung der Poissongl. für eine homogene Kugel / Stern

- Model: $\rho = \frac{M}{V} = \text{const}$ für $|\vec{r}| \leq R$
 $\rho = 0$ sonst



hängt nur vom
Abstand ab

- Lösung: $\Delta \varphi = 4\pi G \rho$ $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ in Kugel-
koord.
nachschlagen

(a) innen

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \varphi_i) = 4\pi G \rho = 4\pi G \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

$$\partial_r (r^2 \partial_r \varphi_i) = 3GM \frac{r^2}{R^3} \quad | \int$$

$$r^2 \partial_r \varphi_i = GM \frac{r^3}{R^3} + A$$

A - Integrations-
konst.

$$\varphi_i = \frac{GM}{2} \frac{r^2}{R^3} - 3 \frac{A}{r^3} + B$$

$A=0$, sonst entsteht Divergenz bei $r=0$, unphysikalisch

(6) außen:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \varphi_a) = 0$$

$$r^2 \partial_r \varphi_a = C$$

$$\varphi_a = -\frac{C}{r}$$

• Bedingungen: Stetigkeit der Felder u. Potentiale

$$(i) \varphi_a(R) = \varphi_i(R) \Rightarrow -\frac{C}{R} = \frac{GM}{2R} + B$$

$$(ii) \vec{g}_a(R) = \vec{g}_i(R)$$

$$\left. \begin{aligned} -\nabla \varphi_a(R) &= -\nabla \varphi_i(R) \\ -\partial_r \varphi_a(R) &= -\partial_r \varphi_i(R) \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{C}{R^2} = -\frac{GM}{R^2}$$

\vec{e}_r -Komponente in KK

$$\boxed{\begin{aligned} C &= GM \\ B &= -\frac{3GM}{2R} \end{aligned}}$$

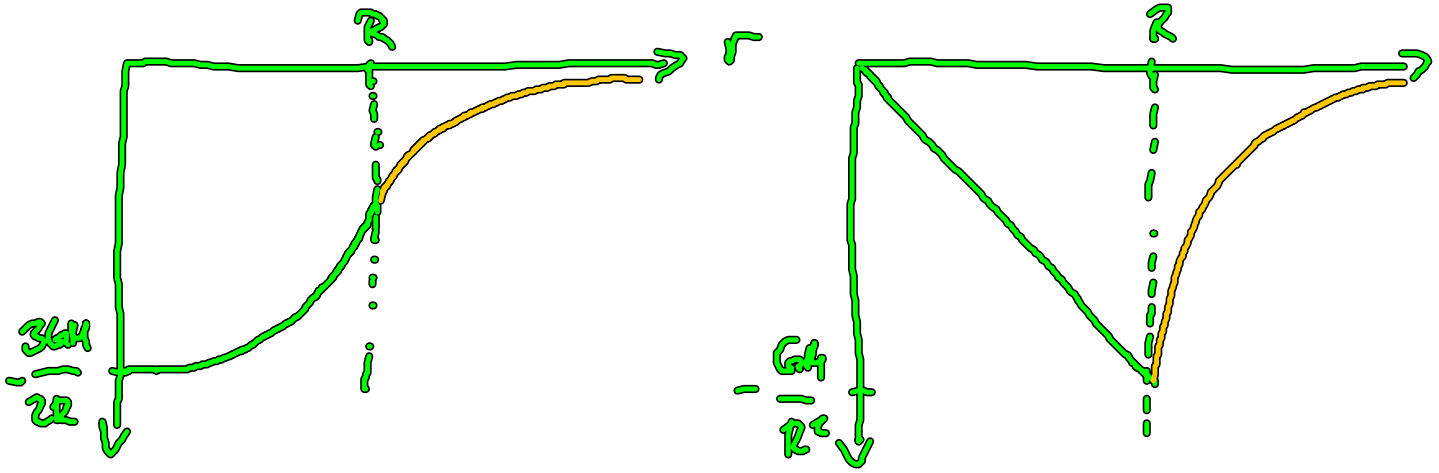
• Anschauung:

$$\varphi_a = -\frac{GM}{r}$$

$$\varphi_i = \frac{GM}{2R} \left(-3 + \frac{r^2}{R} \right)$$

$$g_a = -\frac{GM}{r^2}$$

$$g_i = -\frac{GM}{R^2} \frac{r}{R}$$



- Fazit: Das Potential / Feld einer homogenen unmassenbeladenen Kugel verhält sich im Außenraum wie das Feld einer Punktmasse.

Aber im Innenraum entsteht ein Interpretationsproblem.

$$\underbrace{m \ddot{r}_u}_{\text{Stern-
teilchen}} = f(\vec{r}_u) = \text{mg}(\vec{r}_u) = - \frac{GMm}{r^3} \vec{r}_u \hat{=} \text{Oszillat.-
gl.}$$

⇒ jeder MP müßte (unter Reibung) im Zentrum zur Ruhe kommen ⇒ Kollaps.

Stern ist stabiles Objekt → Gegendruck:

- (a) Wärmeenergie (therm. Beweg.) (Sonne)
- (b) elektromagn. Energie

(c) Fermidurch

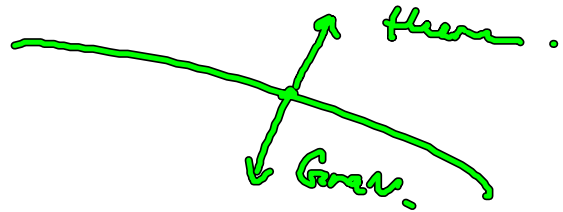
(weißer Zwerg)

- Stern: ideales Gas

$$p = n k T$$

$$\frac{F}{A} = n k T$$

n - Teilchendichte
 k = Boltzmann konst.



$$\sum_n \tau_n \frac{GM_n}{R^2} \frac{1}{4\pi R^2} = \frac{N}{V} k T \quad \left(V = \frac{4\pi}{3} R^3 \right)$$

$$\frac{1}{\Delta V} \int dV r \frac{GM_n}{r^2} = 3 N k T \quad (: N \quad (V = N \Delta V))$$

gehen in KLR

$$\frac{1}{V} \int_0^R dr r^3 \underbrace{\frac{4\pi}{V}}_{\text{Winkel-}} \frac{GM_n}{r^2} = 3 k T$$

int.

$$\frac{1}{V} \frac{4\pi}{4} R^4 \frac{GM_n}{R^2} = 3 k T \quad \Rightarrow \quad \frac{GM_n}{R} = 4 k T$$

→ Stabilitätskriterium eines Sterns

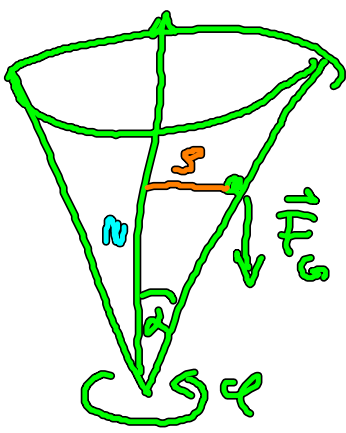
$$k T \sim \frac{GM_n}{R}$$

kann zur wechselseitigen Bestimmung von R, T, M dienen:

$kT \approx 300 \text{ eV} \approx 10^6 \text{ K}$ unterhält Kernreaktion
um Druck aufrecht zu erhalten.

3. Zwangskräfte und Nebenbedingungen

- Nebenbedingung (NB):
Äußere Einschränkungen eines Systems, die **NICHT** externen Kräften zugeordnet werden können.
- Freiheitsgrad (FG):
Zahl der unabh. Parameter, die das System vollständig bestimmen.
(System mit r NBs und N Teilchen hat $3N - r$ FGs)
- Zwangskräfte (ZK):
Realisieren die NB.
- Beispiel: Teilchen rollt auf Kegelmantel



$$S = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- NB: $\tan \alpha = \frac{S}{z}$

- FG: $3N - r = 3 - 1 = 2 = f$
z.B. r, φ

Die NB übt eine Zwangskraft \vec{Z} aus, die „neben“ den eingprägten externen Kräften wirkt (\vec{F}_e)

3.1. Arten von Nebenbedingungen

(a) holonome NB (ganz geschlo.)

Kann man immer als geschlossene Gl. angeben:

$$g_\alpha(\{\vec{r}_j\}, t) = 0 \quad \text{mit } \begin{matrix} j \in [1, N] \\ \alpha \in [0, r] \end{matrix}$$

- Beispiel Kegel: $g_1(r) = z \tan \alpha - r = 0$

- vollst. Differential für holonome NB:

$$\frac{d}{dt} g_\alpha(\{\vec{r}_j(t)\}, t) = \sum_{\alpha \in [0, r]} \sum_{j \in [1, N]} \frac{\partial g_\alpha(\{\vec{r}_j\}, t)}{\partial x_{ji}} \frac{dx_{ji}}{dt}$$

$$+ \frac{\partial g_\alpha(\{\vec{r}_j\}, t)}{\partial t} = 0$$

(b) nicht holonome NB

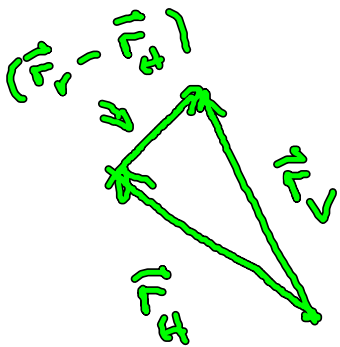
Es ex. kein integrierender Faktor in der Differentialgleichungsform:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^3 h_{\alpha i}(\{\vec{r}_j\}, t) \frac{dx_{ni}}{dt} + h_0(\{\vec{r}_j\}, t) = 0$$

Man benötigt mind. 2 MP.

Sind schwierig, (vergessen wir wieder.)

• Beispiel: Fahrradfahren



(1) konst. Abstand zw. Vorder- und Hinterrad: $\vec{r}_v - \vec{r}_H = L$

(2) Hinterrad muss beim Fahren immer in Richtung $\vec{r}_v - \vec{r}_H$ zeigen

$$\dot{\vec{r}}_H \times (\vec{r}_v - \vec{r}_H) = 0$$

(c) holonome NB (fließgeschlecht)

Die NB sind zeitabhängig

- Beispiel: Pendel mit veränderlicher Länge

$$g_1(z) = \ell^2(t) - l^2(t) = 0$$

(d) skleronome NB (starrgeschlich)

Die NB sind zeitUNabhängig.

Wie lösen wir Probleme mit NB?

→ 2 Varianten

(1) Lagrangegl. I. Art (modifizierte Newtongl.)

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_g + \vec{Z}$$

zK \vec{Z} wirkt zusätzlich zur Grav.kraft und hält Teilchen auf Kugel

$$m\ddot{x}_i = Z_i - mg\vec{e}_i \cdot \delta_{iz}$$

- Aufgabe: Bestimmen der Z_i aus den NB

(2) Lagrangegl. II. Art (generalisierte Koord., die die NB automatisch beinhaltet)

$$L(x_i, \dot{x}_i) = \sum_i \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 - mgz, \quad \rho - z \tan \alpha = 0$$

NB verwenden um eine Koord. aus L zu

eliminieren. Am besten in problem ange-
passter Koordinaten.

3.2 Einbau von NB in die Bewegungsgl.

• Ausgangspunkt:

(a) L. Fkt ohne NB:

$$L = \sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^3 \frac{m_u}{2} \dot{x}_{ui}^2 - V(x_{ui})$$

(b) NB: $g_\alpha(\{x_{ui}\}, t) = 0$

Die x_{ui} können karth. oder andere Koord.

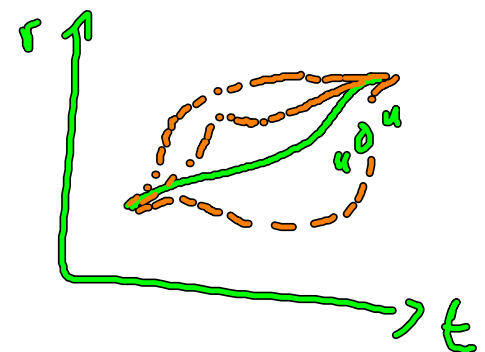
3.2.1 Zwangskräfte in den Newtongl.

• Hamiltonprinzip: kleinster Zwang $\hat{=} \delta = \text{extremal}$

$$(i) 0 = \int dt \sum_{ui} \frac{\partial W}{\partial x_{ui}^0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ui}^0} \delta x_{ui}$$

$$(ii) 0 = g_\alpha(\{x_{ui}\})$$

• Ziel: δx_{ui} linear unabhängig
machen (z.B. einbauen)



→ g_α um die wirl. Bk entwickeln und in (i) einsetzen

$$g_\alpha(\{x_{ui}\}) \approx \underbrace{g_\alpha(\{x_{ui}^0\})}_{=0, \text{ da die richtige Bk}} + \sum_{ui} \frac{\partial}{\partial x_{ui}^0} g_\alpha(x_{ui}^0) \delta x_{ui}^+ = 0$$

Jetzt über Zeit integrieren, mal λ_α nehmen und \sum_α addieren (Methode der Lagrange multiplikatoren)

$$\Rightarrow (i) \quad 0 = \int dt \underbrace{\sum_{ui} \left(\frac{\partial L}{\partial x_{ui}^0} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ui}^0} + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial x_{ui}^0} g_\alpha(x_{ui}^0) \right)}_{=0} \delta x_{ui}^+$$

NB g_α ins Ham.prinzip eingebaut: $\dot{x}_{ui} = 0$

Wir wählen $L = T - V = \sum_{ui} \frac{m_{ui}}{2} \dot{x}_{ui}^2$ und in karth. Koord. folgt.

$$m_{ui} \ddot{x}_{ui} = - \underbrace{\frac{\partial V}{\partial x_{ui}}}_{= \vec{F}_{ui}} + \underbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial x_{ui}} g_\alpha(\{x_{ui}\})}_{= \vec{Z}_{ui}}$$

→ eingepreiste ext. Potentiale $F_{ni} = -\frac{\partial V}{\partial x_{ni}}$

→ Zwangsbedingung: $\vec{Z} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \vec{\nabla} g_{\alpha}(\vec{r}, t)$

Euler-Lagrange - Gl. I. Art

- Interpretation: $\vec{Z} \perp$ auf den Hyperebenen von g_{α}
 - $\Rightarrow \vec{Z}$ hat keine Komponente in Richtung der Fläche
 - $\Rightarrow \vec{Z}$ steht stattdessen \perp auf der Fläche, also parallel zu $\vec{Z} \parallel \vec{\nabla} g_{\alpha}$.

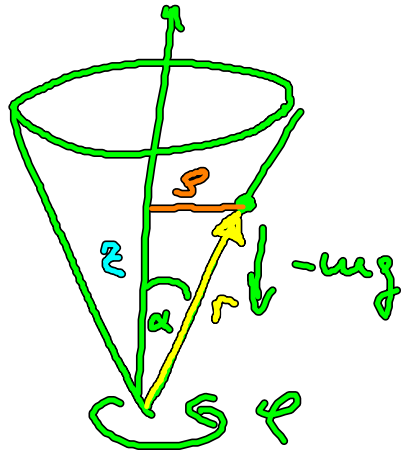
Allgem. Vorgehen bei Lth I

- (1) Formulieren der NB, Koord. wählen
- (2) Lagrangegl. I. Art aufstellen
ZK durch $\vec{Z} = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \vec{\nabla} g_{\alpha}(\vec{r}, t)$ bestimmen
- (3) Lagrange-Multiplikatoren λ_{α} eliminieren

Dabei jede NB g_k zweimal total nach der Zeit ableiten mit Bewegungsgl. eliminieren und aus resultierende Gl. λ_k bestimme

(4) λ_k in LAG I einsetzen, lösen Gleichung, da \vec{z} jetzt bekannt.

• Beispiel:



(1) NB: Kegelgl: $g_1 = \rho - z \tan \alpha = 0$

verwenden Zyl.koord: (ρ, φ, z)

(2) LAG I aufstellen: $m \vec{\ddot{r}} = \vec{F} + \vec{z}$

$$m \vec{\ddot{r}} = -mg \vec{e}_z + \lambda_1 \vec{\nabla}_{z_k} g_1(r)$$

in Komponenten;

(i) $m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) = 0 + \lambda_1 \cdot 1$

(ii) $m(\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = 0 + \lambda_1 \cdot 0$

(iii) $m\ddot{z} = -mg - \lambda_1 \tan \alpha$

$$\vec{\nabla}_{z_k} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$\lambda_1 \quad z_\rho = \lambda_1$

$z_\varphi = 0$

$z_z = -\lambda_1 \tan \alpha$

(3) λ_2 eliminieren

$$\frac{d^2}{dt^2} g_1(r) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (g - z \tan \alpha) = \ddot{g} - \ddot{z} \tan \alpha \stackrel{!}{=}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{g} = \ddot{z} \tan \alpha}$$

in Gl. (i) einsetzen

$$(i) \quad m \ddot{g} = m g \dot{\varphi}^2 + \lambda_1$$

$$m (\ddot{z} \tan \alpha) = m g \dot{\varphi}^2 + \lambda_1$$

jetzt \ddot{z} aus Gl. (iii) einsetzen

$$(iii) \quad \ddot{z} = -g - \frac{\lambda_1}{m} \tan \alpha$$

$$(i) \quad m \tan \alpha \left(-g - \frac{\lambda_1}{m} \tan \alpha \right) = m g \dot{\varphi}^2 + \lambda_1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = - \left(\frac{m g \dot{\varphi}^2 + m g \tan \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)} \right)$$

Damit können wir die ZH bestimmen.

(4) Lsg. der Bewegungsgl.

$$(i) \quad (\ddot{\varphi} - g\dot{\varphi}^2) = - \left(\frac{g \tan \alpha + g\dot{\varphi}^2}{(1 + \tan^2 \alpha)} \right)$$

$$(ii) \quad (g\dot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\ddot{\varphi}) = 0$$

$$(iii) \quad \ddot{z} = -g + \frac{g\dot{\varphi}^2 + g \tan \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)} \cdot \tan \alpha$$

Alternativedarstellung über $z = r \cdot \sin \alpha$
in (i)-(iii) einsetzen

$$\Rightarrow \quad \ddot{r} - \sin^2 \alpha r \dot{\varphi}^2 = -g$$