3.2.2. Nebenbedingungen in Lagrange-Gleichungen 2. Art

bisher Nebenbedingungen im Newton-Gesetz eingebaut

jetzt: Lagrangegl. 2. Art

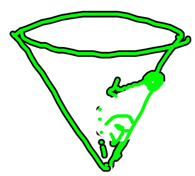
Ausgangspunkt: r Nebenbedingungen (Form: $g_\alpha(x_{ni}) = 0$)

$3N$ Koordinaten (N Teilchen mit x_{ni})

$\rightarrow$ $3N - r = f$ voneinander unabhängige Koordinaten (Freiheitsgrade)

Beispiel:

Bewegung auf Kegel



Koordinaten x, y, z f. $N=1$

Nebenbedingg. ϑ in Kugelkoordinaten $=$ konstant ($r=1$)

$\rightarrow$ r, φ ausreichend ($f=2$)

Frage: allgemeine Formulierung der Euler-Lagrange gl. (Lagrange 2. Art) mit solchen Nebenbedingungen

dazu: aus $\{x_{ni}\}$ ($3N$ Stück) müssen unabhängige Koordinaten $\{q_i\}$ bestimmt werden, die die NB schon berücksichtigen

von $\{q_i\}$: $3N - r = f$ Stück geben

$\nearrow$

berücksichtigen die Nebenbedingungen

$\{q_i\}$: generalisierte Koordinaten, weil:

a) berücksichtige die NB

b) müssen in Vielteilchensystem nicht direkten Teilchenkoordinaten entsprechen (z.B. Abstand zwischen Teilchen)

- mathematische Formulierung: $x_{\mu i} = x_{\mu i}(q_j)$

Umkehrung muß existieren

$$g_\alpha(x_{\mu i}) = 0$$

(Bsp: Kugelkoordinaten $\vartheta = \alpha =$ konst)

$$dx_{\mu i} = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial x_{\mu i}}{\partial q_j}\, dq_j$$

Anwendung auf Wirkprinzip $\delta S = 0$

bisher ohne Nebenbedingungen: (verallgemeinerte VL L 1. Art)

$$\delta S = 0 = \int dt \sum_{i,\mu}^{3N} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial x_{\mu i}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\mu i}} \right)}_{\substack{\text{bisher } = 0 \text{ gesetzt, geht}\\ \text{aber nicht mehr,}}} \delta x_{\mu i}$$

weil δx_{ui} <u>nicht</u> unabhängig variierbar

→ würden also $\{q_j\}$ einführen: die sind unabhängig

$\delta x_{ui} \to \delta q_j$, verwende des vollständigen Differentials

$$\delta S = 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{i,u}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial x_{ui}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ui}} \right) \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial x_{ui}}{\partial q_j} \delta q_j$$

x, y, z

Bsp: r, φ

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{f} \sum_{i,u}^{3N} \left(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial x_{ui}} \frac{\partial x_{ui}}{\partial q_j}}_{\frac{\partial L}{\partial q_j}} - \underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{ui}} \frac{\partial x_{ui}}{\partial q_j}}_{?} \right) \delta q_j$$

um ? zu berechnen sehen wir uns $\dot{x}_{ui}$ an

$$\frac{d}{dt} x_{ui} = \sum_j \frac{\partial x_{ui}}{\partial q_j} \frac{d q_j}{dt} \qquad \Big| \ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}$$

$x_{ui}(q_j(t))$

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \dot{x}_{ni} = \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{\partial x_{ni}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) = \sum_j \frac{\partial x_{ni}}{\partial q_j} \delta_{kj}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_{ni}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial x_{ni}}{\partial q_k}$$ anwenden in $\underbrace{\qquad\qquad}_{2.}$

gilt Kettenregel nach $\dot{x}_{ni}$

$$\downarrow \quad 0 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_j} \right) \underline{\delta q_j}$$

unabhängig!

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

Lagrange gl. 2. Art für unabhängige bzw generalisierte Koordinaten $\{q_j\}$ die <u>die Nebenbedingungen bereits enthalten</u>.

$L = L(q_j)$ enthält die NB

<u>Allgemeines Vorgehen bei Lagrange 2. Art in generalisierten Koordinaten:</u>

1/ Nebenbedingungen formulieren

2/ generalisierte Koordinaten einführen $\{q_j\}$

(verträglich mit NB, unabhängig variierbar)

3/ L in $\{q_j\}$ formulieren

4/ Lagrange 2. Art aufschreiben

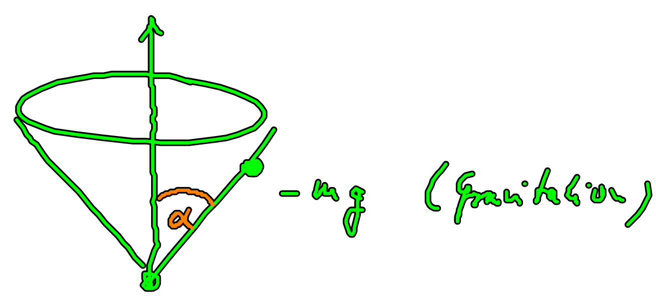
gibt es Erhaltungsgrößen: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow$ E-Erhaltung ?

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \rightarrow p_j = \text{erhalten} \quad ?$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

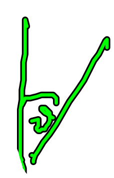
5/ Lösung der Lagrangegl. 2. Art unter Verwendung der Erhaltungsgrößen.

__Beispiel__ Bewegung auf Kegel



zu 1) sehr einfach: konstanter Azimut ∢ $\vartheta = \alpha$ ∀ Zeiten in Kugelkoordinaten

ϑ = konstant



zu 2) Kugelkoordinaten: $r, \vartheta, \varphi \longrightarrow r, \varphi$, weil $\vartheta = \alpha$

$\underbrace{\qquad}_{x_{ni}}$ $\underbrace{\qquad}_{q_j}$

zu 3) $L = T - V = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2\right)$

Kugelkoordinaten

$- m g z$, $z = r\cos\vartheta$

Einbau der NB: $\vartheta \equiv \alpha =$ fest

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\alpha\,\dot{\varphi}^2\right) - mg\cos\alpha\, r$$

zu 4) $\frac{\partial L}{\partial r} = m r \sin^2\alpha\,\dot{\varphi}^2 - mg\cos\alpha$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$

$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Downarrow p_\varphi =$ konstant $\quad \underline{\underline{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \rightarrow$ Energieerhaltung

zu 5) löse:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r}$$

$$\underbrace{\ddot{r} = r \sin^2\alpha\, \dot{\varphi}^2 - g\cos\alpha}$$

Gleichg. f. $r(t)$, koppelt an $\dot{\varphi}$

$$p_\varphi = m r^2 \sin^2\alpha\, \dot{\varphi} = \text{konstant}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2\alpha} \quad \text{in (*) einsetzen}$$

$$\boxed{\ddot{r} = \frac{p_\varphi^2}{m^2 \sin^2\alpha\, r^3} - g\cos\alpha}$$

Dgl. f. $r(t)$, ist zu lösen

nicht linear, 2. Ordng. → Problem

aber 2. Erhaltungsgröße, Energie ermöglicht einfache Diskussion

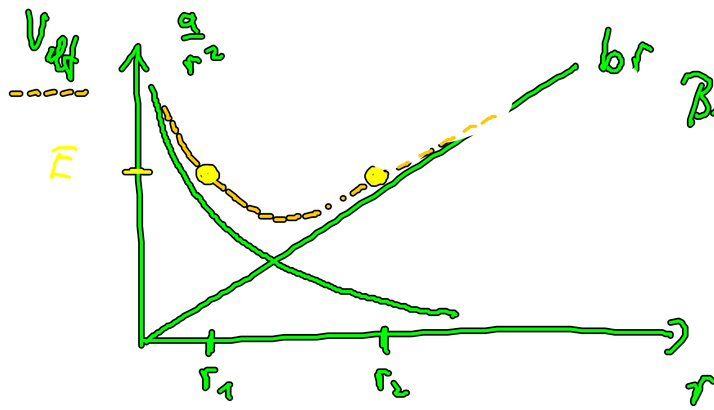
$$E = \text{konstant} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L, \quad \text{einsetzen } r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}$$

Vorlesung VL (beweisen)

$$\underset{\text{Konstante}}{E} = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{r}^2}_{\substack{\text{kinet. Energie}\\ \text{bzgl. } \dot{r}}} + \underbrace{\frac{p_\varphi^2}{2 m r^2 \sin\alpha}}_{\substack{\text{Drehimpuls-}\\ \text{potential}\\ \text{analog Kepler}}} + \underbrace{m g r \cos\alpha}_{\substack{\text{potentielle Energie}\\ \text{d. Gravitation}}}$$

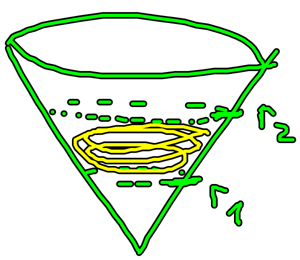
umstellen nach $\frac{dr}{dt}$, Trennung d. Variablen, kann gelöst werden.

<u>qualitative Diskussion</u> $V_{eff} = \frac{a}{r^2} + br$



Bewegg. im effektiven Potential

f. $\dot r = 0$ ist $E = V_{eff}$ (Umkehrpunkte)



Bewegg. ist f. hinreichend große E auf r_1 bis r_2 beschränkt,

erreicht nie die Spitze,

wenn $a \neq 0$, $p_\varphi \neq 0$

4. Hamiltonformalismus und Schritte zur Quantenmechanik

Heisenberg 1927 Unschärferelation

Ort u. Impuls eines Teilchens sind nicht beliebig genau gleichzeitig meßbar.

→ Impuls nimmt zentrale Rolle ein

Formalismus: $q_i, \underline{\dot q_i}, t \longrightarrow q_i, \underline{p_i}, t$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$$

Geschwindigkeit $\dot q_i$ sollen durch Impulse ersetzt werden.

$$L(q_i, \dot q_i, t) \longrightarrow H(q_i, p_i, t)$$

Lagrangefunktion $\qquad$ Hamiltonfunktion

soll tragende Rolle in Theorie übernehmen

4.1. Hamiltongleichungen

Kennen Systemenergie: $E = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \dot q_i - L(q_i, \dot q_i, t)$

man könnte die rechte Seite ausrechnen und alle $\dot q_i$ durch $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$ ersetzen: $p_i = p_i(q_j, \dot q_j, t)$

wenn $\dot q_i = \dot q_i(q_j, p_j, t)$

$$H(q_i, p_i, t) = E(q_i, p_i, t)$$

Def. d. Hamiltonfunktion.

wenn mit H gearbeitet werden soll, braucht man neue Bewegungsgl. → es gibt kein L mehr!

$$H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L(q_i, \dot{q}_i, t) \xrightarrow[\dot{q}_i = \dot{q}_i(\underline{q_j}, \underline{p_j}, t)]{\text{über}} \underline{H(q_i, p_i, t)}$$

<u>Bewegungsgl.</u>:

$$(i)\quad \frac{\partial H}{\partial q_k} = \sum_i \underline{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k}} p_i - \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial q_i}{\partial q_k}}_{\delta_{ik}} - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \underline{\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_k}}$$

1+3 Term heben sich weg

$$= -\frac{\partial L}{\partial q_k} = -\frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} = -\dot{p}_k$$

↑ Lagrange 2. Art

$$\boxed{\text{1. Hamiltonsche Gl.}\quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}}$$

Hamiltonfkt. gegeben → Dynamik d. Impulse

(ii) $$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \sum_i \frac{\partial \dot q_i}{\partial p_k} p_i + \sum_i \dot q_i \underbrace{\frac{\partial p_i}{\partial p_k}}_{\delta_{ik}} - \sum_i \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{p_i} \frac{\partial \dot q_i}{\partial p_k}$$

1. und 3. Term heben sich weg.

$$\boxed{\text{2. Hamiltonsche Gleichg.:} \quad \dot q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}}$$

(iii) bereits bekannt:

$$\boxed{\text{3. Hamiltonsche Gl.} \quad \frac{d}{dt} H = -\frac{\partial}{\partial t} L}$$

gibt über Energiebilanz Auskunft

1+2. Gleichg. legen die Bahnkurven fest