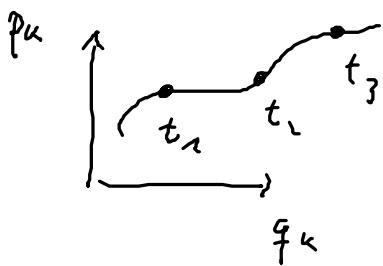


Bemerkungen zu den Hamiltongleichungen:

- a) Die Hamiltongleichungen $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ stellen ein Differentialgleichungssystem (2f Gleichungen) ersten Ordng. dar. Lagrange- und Newtongleichungen sind 2. Ordnung.
- b) Energiebilanz ist: $\frac{d}{dt} H = -\frac{\partial L}{\partial t}$
- c) im Vergleich zu Newtongleichungen / Lagrangegleichungen bestehen keine inhärenten, aber technische Unterschiede
- d) Raum der von den Koordinaten q_k, p_k aufgespannt wird, heißt Phasenraum.



Bahnkurve durchläuft Phasenraum im Verlauf der Zeit

(im allgemeinen viele Achsen)

Vorgehen beim Verwenden der Hamiltongleichungen

- 1/ L aufschreiben $L(q_k, \dot{q}_k, t)$

2) Impulse berechnen $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$, dann $\dot{q}_k = \dot{q}_k(p_i)$

3) H aufschreiben $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = H(q_k, p_k, t)$

4) Hamiltongl. aufschreiben \rightarrow Bewegungsgl. lösen

Illustration an Kegel

zu 1) $L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) - mgr \cos \alpha$

Nebenbedingg. bereits berücksichtigt Variable: r, φ

zu 2) $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}$

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r}$$

zu 3) $H = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \alpha$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m r^2 \sin^2 \alpha} - \frac{m}{2} \left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \sin^2 \alpha \frac{p_\varphi^2}{(m r^2 \sin^2 \alpha)^2} \right)$$

$$+ mgr \cos \alpha$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + m g r \cos \alpha = H(p_r, p_\varphi, r, \alpha)$$

$$u 4) \quad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2 \sin^2 \alpha}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{m r^3 \sin^2 \alpha} - m g \cos \alpha$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad p_\varphi = \text{konstant}$$

Wenn eine Koordinate / Impuls nicht
in H vorkommt \rightarrow zugehörige (konjugierte) Variable
eine Erhaltungsgröße.

4 Dgl. 1. Ordnung, sind zu lösen

Äquivalent zu Lagrange 2. Art:

$$\ddot{r} = \frac{\dot{p}_r}{m} \rightarrow \ddot{r} = -g \cos \alpha + \frac{p_\varphi^2}{m r^3 \sin^2 \alpha}$$

identisch mit Bsp. aus letzter VL

willkürliche H-Funktion:

a) freie Teilchen $H = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ (kinetische Energie)

b) Teilchen in Potential $V(\vec{r})$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

c) Teilchen in elektromagnetischem Feld

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + \underbrace{q\phi}$$

$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}$ Skalar Potential ϕ
 $\hat{=}$ potentielle Energie

d) Hamiltondichte elektromagnetischen Felds

$$\mathcal{H} = \frac{\epsilon_0}{2} \vec{E}(\vec{r}, t)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}(\vec{r}, t)^2$$

Energiedichte d. elektromagn. Felds

4.2. Kanonische Transformationen (KT)

KT sind Transformationen der Koordinate $\{q_k, p_k\}$ und der Hamilton fkt. $H(q_k, p_k)$ auf neue Koordinate $\{Q_j, P_j\}$ und neue Hamilton fkt. $H'(Q_j, P_j)$, bei der die Hamiltongleichungen in ihrer Form erhalten bleiben:
(invariant bleiben)

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = - \frac{\partial H'}{\partial Q_j}$$

Ziel: Vereinfachg. d. Problems

$H \rightarrow H' = 0$ wäre das schönste Gleichungssystem

weil dann nur Erhaltungsgrößen Q_j, P_j

4.2.1. Transformation der Lagrange funktion

welche Freiheit hat man, um KT zu machen?

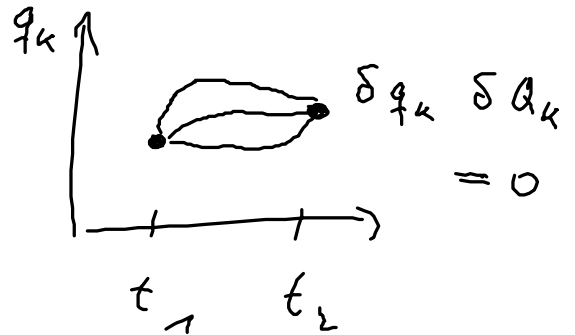
Freiheit: $L \rightarrow L' \pm \frac{d}{dt} R(q_k, Q_k, t)$

ist mögl., weil es das Wirkprinzip $\delta S = 0$ nicht verändert.

$$S \rightarrow S' = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(q_k, \dot{q}_k, t) \pm \frac{d}{dt} R(q_k, Q_k, t) \right)$$

$$= S \pm \left[R(q_k(t_2), Q_k(t_2), t_2) - R(q_k(t_1), Q_k(t_1), t_1) \right]$$

$$\delta S' = \delta S \pm \underbrace{\delta [\quad]}_{=0}$$



$$\delta S' = \delta S = 0$$

es gilt also weiterhin das Wirkprinzip

Die Lagrange funktion kann um die totale Zeitableitung

einer Funktion $R(q_k, Q_k, t)$ verändert werden
ohne dabei die Physik zu verändern.


Man spielt oft v. Eichtransformationen.

„Umschieben“ des L -Fkt.

Bsp $L = \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}, t) - q \phi(\vec{r}, t) + q \dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$

Elektron im
Kernpotential

WW mit elektromagn. Feld

Licht-
Welle  \ominus
 \oplus

Idee: man möchte nicht E, D -Feld haben

(A, ϕ)

$R: \vec{r}(t)$

$$L' = L + \frac{d}{dt} \left(-q \vec{r}(t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \right)$$

$$= L - q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - q \vec{r} \cdot \left(\dot{\vec{r}} \cdot \nabla_r \vec{A}(\vec{r}, t) \right) - q \vec{r} \cdot \partial_t \vec{A}$$

Licht hat große Wellenlänge gegen Atomradius

$$\lambda \gg a_0$$



Dipolapproximation

= 0

man liest in $A(\vec{r}/t), \phi(\vec{r}, t)$ dass \vec{r} weg

$$\vec{E}, \vec{D} = \vec{E}(\vec{r}/t), \vec{D}(\vec{r}/t)$$

$$L' = \frac{m_0}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) - q \phi(t) - q \vec{r} \cdot \partial_t \vec{A}(t)$$

Ergebnis: $\vec{E} = -\underbrace{\vec{\nabla}\phi}_{\text{?}} - \underbrace{\partial_t \vec{A}} = \vec{E}_L + \vec{E}_T$

$$\vec{E}_L \equiv \vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{E}_L(t)) =$$

$$\vec{r} \cdot \vec{E}_L = -\phi$$

$$L' = \underbrace{\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})}_{\text{kinet. Energie d. El im Feld d. Kerns}} + \underbrace{q \vec{r} \cdot \vec{E}(t)}_{\text{Wechselwirkungsenergie ein Dipols } q\vec{r} \text{ im Feld } \vec{E}(t)}$$

kinet. Energie d.

Wechselwirkungsenergie

El im Feld d. Kerns

ein Dipol $q\vec{r}$ im Feld $\vec{E}(t)$

L' enthält nur noch Feld \vec{E} , nicht ϕ, \vec{A} ,

die wichtigste Korrektur ist $+\underbrace{(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{B}(t)}_{\text{Drehimpuls d. El.}}$ o. Beweis

Drehimpuls d. El.

$\hat{=}$ Bahn magnetisches

4.2.2. Konstruktion von H f. kanonische Transformations

Umwidg. der Lagrangefunktion verwenden

$$L' = L(q_k, p_k, t) - \dot{R}(q_k, Q_k, t) \quad \checkmark$$

umisse $q_k(Q_k, P_k)$ und $p_k(Q_k, P_k)$ finden

dazu Differentialbildung:

$$dR = \sum_k \left(\frac{\partial R}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial R}{\partial Q_k} dQ_k \right) + \frac{\partial R}{\partial t} dt$$

$$L' = L - \dot{R}$$

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$$

$$\sum_k p_k \dot{Q}_k - H' = \sum_k p_k \dot{q}_k - H - \dot{R} \quad | dt$$

$$\sum_k p_k dQ_k - H' dt = \sum_k p_k dq_k - H dt - dR$$

Vergleich der Differentiale dQ_k, dq_k, dt

und dR wird v. oben eingesetzt

$$-\left(H' - H - \frac{\partial R}{\partial t}\right) dt + \sum_k \left(p_k + \frac{\partial R}{\partial Q_k}\right) dQ_k =$$

$$\sum_k \left(p_k - \frac{\partial R}{\partial q_k}\right) dq_k$$

unabhängige Variablen der Diff.iale:

$$H' = H + \frac{\partial R}{\partial t} \quad \text{gibt } H' \text{ weil } R \text{ bekannt (vorgegeben)}$$

$$P_k = - \frac{\partial R(q_k, Q_k)}{\partial Q_k} \rightarrow P_k = P_k(q_k, Q_k)$$

$$P_k = \frac{\partial R(q_k, Q_k)}{\partial q_k} \rightarrow P_k = P_k(q_k, Q_k)$$

umstellen
nach

$$q_k = q_k(P_k, Q_k)$$

$$P_k = P_k(P_k, Q_k)$$

damit kann
 P_k, q_k zugunsten
von P_k, Q_k eliminiert
werden

$$\downarrow \underline{\underline{H'(Q_k, P_k)}} = H(q_j, p_j) + \frac{\partial R(q_j, Q_j)}{\partial t}$$

Beweis: es existieren verschiedene R um H zu verändern

$$R_1 = R_1(q_k, Q_k, t) \quad \text{diskret}$$

$$R_2 = R_2(q_k, \underline{P_k}, t) \equiv R_1(q_k, \underline{Q_k}, t) + \sum_k \underline{P_k Q_k}$$

R_2 geht aus R_1 durch eine Legendre transform hervor

hier die Differential bilden: $dR_2 = dR_1 + \sum_k (dP_k Q_k + P_k dQ_k)$

und Vorzeichen vergleichen:

aus dq_k : $\frac{\partial R_2}{\partial q_k} = \frac{\partial R_1}{\partial q_k} = P_k$ (i) aus Formel f. R_1

aus dP_k : $\frac{\partial R_2}{\partial P_k} = Q_k$ (ii)

aus dt : $\frac{\partial R_2}{\partial t} = \frac{\partial R_1}{\partial t} = H' - H \rightarrow H' = H + \frac{\partial R_2}{\partial t}$ aus Formel v. R_1

hier ist H' bekannt +

aus dQ_k : $0 = \frac{\partial R_1}{\partial Q_k} + P_k$ bekannt
aus Formel
von R_1

die Umredng. in Q_k, P_k erfolgt
mit Hilfe der
Formeln (i, ii)

und mgl.: $R_3 = R_3(p_k, Q_k, t)$

$$R_4 = R_4(p_k, P_k, t)$$

die R_i 's sind Erzeugende einer kanonischen

Transformation genannt