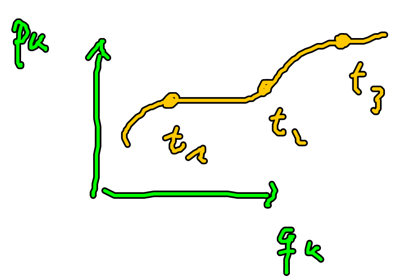
Bemerkungen zu den Hamiltongleichungen:

a) Die Hamiltongleichungen $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$
stellen ein Differentialgleichungssystem (2f Gleichungen) erster Ordnung dar.
Lagrange- und Newtongleichungen sind 2. Ordnung.

b) Energiebilanz ist: $\frac{d}{dt} H = -\frac{\partial L}{\partial t}$

c) im Vergleich zu Newtongleichungen / Lagrangegleichungen
bestehen keine inhaltlichen, aber technische Unterschiede

d) Raum der von den Koordinaten q_k, p_k aufgespannt wird, heißt Phasenraum



Bahnkurve durchläuft Phasenraum im Verlauf der Zeit

(im allgemeinen viele Achsen)

Vorgehen beim Verwenden der Hamiltongleichungen

1) L aufschreiben $L(q_k, \dot{q}_k, t)$

2) Impulse berechnen $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$, damit $\dot{q}_k = \dot{q}_k(p_i)$

3) H aufschreiben $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L = H(q_k, p_k, t)$

4) Hamiltongl. aufschreiben $\rightarrow$ Bewegungsgl. lösen

Illustration am Kegel

zu 1) $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\alpha\, \dot{\varphi}^2\right) - mgr\cos\alpha$

Nebenbedingg. bereits berücksichtigt   Variablen: r, φ

zu 2) $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2\alpha\, \dot{\varphi}$

$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$

zu 3) $H = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2\alpha\, \dot{\varphi}^2\right) + mgr\cos\alpha$

$$= \frac{p_r^2}{m} + \frac{p_\varphi^2}{m r^2 \sin^2\alpha} - \frac{m}{2}\left(\frac{p_r^2}{m^2} + r^2 \sin^2\alpha \frac{p_\varphi^2}{(m r^2 \sin^2\alpha)^2}\right)$$

$$+ mgr\cos\alpha$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha = H(p_r, p_\varphi, r, \varphi)$$

zu 4) $$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\alpha}$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\varphi^2}{mr^3\sin^2\alpha} - mg\cos\alpha$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \qquad p_\varphi = \text{konstant}$$

Wenn eine Koordinate / Impuls nicht in H vorkommt $\rightarrow$ zugehörige (konjugierte) Variable eine Erhaltungsgröße.

4 Dgl. 1. Ordnung, sind zu lösen

Äquivalenz zu Lagrange 2. Art:

$$\ddot{r} = \frac{\dot{p}_r}{m} \longrightarrow \ddot{r} = -g\cos\alpha + \frac{p_\varphi^2}{mr^3\sin^2\alpha}$$

identisch mit Bsp. aus letzter VL

wichtige H-Funktion :

a) freie Teilchen $H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$ (kinetische Energie)

b) Teilchen in Potential $V(\vec{r})$

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{r})$$

c) Teilchen in elektromagnetischem Feld

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + \underbrace{q\phi}_{}$$

$\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$ skalares Potential ϕ $\widehat{=}$ potentielle Energie

d) **Hamiltondichte elektromagnetischen Felds**

$$\mathcal{H} = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}(\vec{r},t)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}(\vec{r},t)^2$$

Energiedichte d. elektromagn. Felds

4.2. Kanonische Transformationen (KT)

KT sind Transformationen der Koordinaten $\{q_k, p_k\}$ und der Hamiltonfkt. $H(q_k, p_k)$ auf neue Koordinaten $\{Q_j, P_j\}$ und neue Hamiltonfkt. $H'(Q_j, P_j)$, bei der die Hamiltongleichungen in ihrer Form erhalten bleiben: (invariant bleiben)

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial H'}{\partial P_j}, \quad \dot{P}_j = -\frac{\partial H'}{\partial Q_j}$$

Ziel: Vereinfachg. d. Problems

$H \to H' = 0$ wäre das schönste Weihnachtsgeschenk

weil dann nur Erhaltungsgrößen Q_j, P_j

4.2.1. Transformation der Lagrangefunktion

welche Freiheit hat man, um KT zu machen?

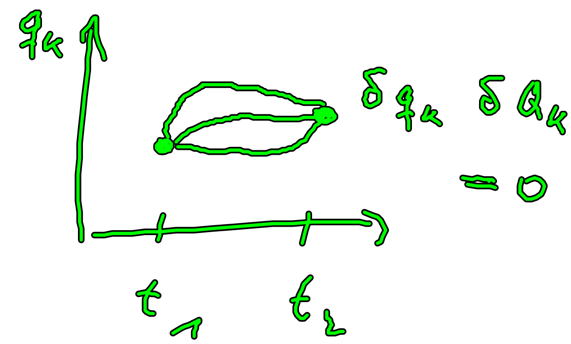
Freiheit: $\quad L \to L' \pm \frac{d}{dt} R(q_k, Q_k, t)$

ist mögl., weil es das Wirkprinzip $\delta S = 0$ nicht verändert.

$$S \to S' = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} dt \left(L(q_k, \dot{q}_k, t) \pm \frac{d}{dt} R(q_k, Q_k, t) \right)}$$

$$= S \pm \left[R\left(q_k(t_2), Q_k(t_2), t_2\right) - R\left(q_k(t_1), Q_k(t_1), t_1\right) \right]$$

$$\delta S' = \delta S \pm \underbrace{\delta[\qquad]}_{=0}$$



$$\underbrace{\delta S' = \delta S = 0}$$

es gilt also weiterhin das Wirkprinzip

Die Lagrangefunktion kann um die totale Zeitableitg. einer Funktion $R(q_k, Q_k, t)$ verändert werden ohne dabei die Physik zu verändern.

Man spricht oft v. Eichtransformationen.

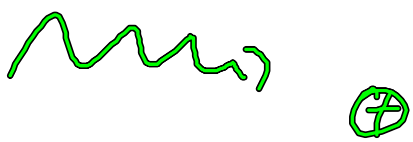
„Umeichen" der L-Fkt.

<u>Bsp</u> $L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) - q\,\phi(\vec{r}, t) + q\,\dot{\vec{r}}(t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$

Elektron im Kernpotential

WW mit elektromagn. Feld

Licht-



Welle

(A, ϕ)

Idee: man möchte eigentlich E, B-Feld haben

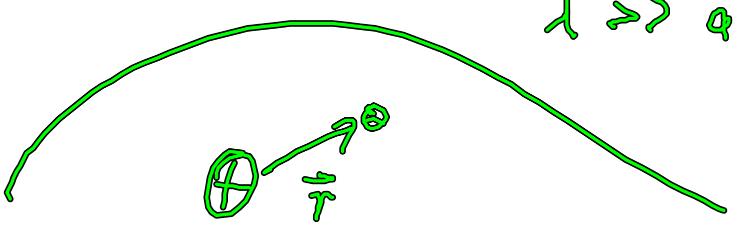
R: $\vec r(t)$

$$L' = L + \frac{d}{dt}\left(-q\,\vec r(t)\cdot\vec A(\vec r,t)\right)$$

$$= L - q\,\dot{\vec r}\cdot\vec A(\vec r,t) - q\,\underbrace{\vec r\cdot\left(\dot{\vec r}\cdot\vec\nabla_r\vec A(\vec r,t)\right)}_{=0} - q\,\vec r\cdot\partial_t\vec A$$

Licht hat große Wellenlänge gegen Atomradius

$\lambda \gg a_0$



Dipolapproximation

man lässt in $A(\cancel{\vec r},t)$, $\phi(\vec r,t)$ das $\vec r$ weg

$\vec E, \vec B = \vec E(\cancel{\vec r}), \vec B(\cancel{\vec r})$

$$L' = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^2 - V(\vec r) - q\,\phi(t) - q\,\vec r\cdot\partial_t\vec A(t)$$

Erinnerung: $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} = \vec{E}_L + \vec{E}_T$

?

$$\vec{E}_L = \vec{\nabla}\left(\vec{r}\cdot\vec{E}_L(t)\right) =$$

$$\vec{r}\cdot\vec{E}_L = -\phi$$

$$\boxed{L' = \underbrace{\frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})}_{\text{Kinetische Energie d. El. in Feld d. Kerns}} + \underbrace{q\,\vec{r}\cdot\vec{E}(t)}_{\text{Wechselwirkungsenergie eines Dipols } q\vec{r} \text{ im Feld } \vec{E}(t)}}$$

L' enthält nur noch Feld $\vec{E}$, nicht $\phi, \vec{A}$.

die nächste Korrektur ist $+\underbrace{(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})}_{\substack{\text{Drehimpuls d. El.}\\ \hat{=}\ \text{Bahnmagnetismus}}}\cdot\vec{B}(t)$ o. Beweis

4.2.2. Konstruktionsvorschrift f. kanonische Transformationen

Umkehrg. der Lagrangefunktion verwenden

$$L' = L(q_k, p_k, t) - \dot{R}(q_k, Q_k, t) \quad \checkmark$$

müssen $q_k(Q_k, P_k)$ und $p_k(Q_k, P_k)$ finden

dazu Differentialbildung:

$$dR = \sum_k \left(\frac{\partial R}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial R}{\partial Q_k} dQ_k \right) + \frac{\partial R}{\partial t} dt$$

$$L' = L - \dot{R}$$

$$H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$$

$$\sum_k P_k \dot{Q}_k - H' = \sum_k p_k \dot{q}_k - H - \dot{R} \quad \Big| \, dt$$

$$\sum_k P_k \, dQ_k - H' dt = \sum_k p_k \, dq_k - H dt - dR$$

Vergleich der Differentiale dQ_k, dq_k, dt

und dR wird v. oben eingesetzt

$$-\left(H' - H - \frac{\partial R}{\partial t}\right) dt + \sum_k \left(P_k + \frac{\partial R}{\partial Q_k}\right) dQ_k =$$

$$\sum_k \left(p_k - \frac{\partial R}{\partial q_k}\right) dq_k$$

unabhängige Variable der Diff.rechnung:

$$H' = H + \frac{\partial R}{\partial t}$$ gibt H' wenn R bekannt (vorgegeben)

$$P_k = -\frac{\partial R(q_k, Q_k)}{\partial Q_k} \longrightarrow P_k = P_k(q_k, Q_k)$$

$$p_k = \frac{\partial R(q_k, Q_k)}{\partial q_k} \longrightarrow p_k = p_k(q_k, Q_k)$$

umstellen nach

$$q_k = q_k(P_k, Q_k)$$
$$p_k = p_k(P_k, Q_k)$$

damit kann p_k, q_k zugunsten von $P_k\ Q_k$ eliminiert werden

$$\underline{\underline{H'(Q_k, P_k)}} = H(q_j, p_j) + \frac{\partial R(q_j, Q_j)}{\partial t}$$

<u>Bemerkung</u>: es existieren <u>verschiedene</u> R um H. zu verändern

$R_1 = R_1(q_k, Q_k, t)$ diskutiert

$$R_2 = R_2(q_k, \underline{\underline{P_k}}, t) \equiv R_1(q_k, \underline{\underline{Q_k}}, t) + \underline{\sum_k P_k Q_k}$$

R_2 geht aus R_1 durch eine Legendretransformation hervor wieder Differential bilden: $dR_2 = dR_1 + \sum_k (dP_k\, Q_k + P_k\, dQ_k)$

und Vorfaktoren vergleichen:

aus Formel f. R_1

aus $\underline{dq_k}$: $$\frac{\partial R_2}{\partial q_k} = \frac{\partial R_1}{\partial q_k} = p_k \qquad (i)$$

aus dP_k: $$\frac{\partial R_2}{\partial P_k} = Q_k \qquad (ii)$$

aus Formel v. R_1

aus dt: $$\frac{\partial R_2}{\partial t} = \frac{\partial R_1}{\partial t} = H' - H \quad \longrightarrow \quad \underbrace{H' = H + \frac{\partial R_2}{\partial t}}$$

insgesamt ist H' bekannt + die Umrechnung in Q_k, P_k erfolgt mit Hilfe der Formeln (i, ii)

aus dQ_k: $$0 = \frac{\partial R_1}{\partial Q_k} + P_k$$ bekannt aus Formel von R_1

analog: $$R_3 = R_3(p_k, Q_k, t)$$
$$R_4 = R_4(p_k, P_k, t)$$

die R_i's werden Erzeugende einer kanonischen Transformation genannt