Zusammenfassg. zu kanonischen Transformationen

am Beispiel der Erzeugenden $R_2(q_k, P_k, t)$

- KT: Übergang $\{q_k, p_k, H(q_k, p_k)\} \longrightarrow \{Q_k, P_k, H'(Q_k, P_k)\}$

- kanonische Gleichungen gelten unverändert:

$$\dot{p}_k = -\partial_{q_k} H \longrightarrow \dot{P}_k = -\partial_{Q_k} H'$$

$$\dot{q}_k = \partial_{p_k} H \longrightarrow \dot{Q}_k = \partial_{P_k} H'$$

- Konkrete Transformationsformeln:

$$H'(Q_k, P_k) = H(q_k, p_k) + \partial_t R_2(q_k, P_k) \qquad (i)$$

$$p_k = \partial_{q_k} R_2 \,, \quad Q_k = \partial_{P_k} R_2 \qquad (ii)$$

mittels (ii): $q_k = q_k(Q_i, P_k)$, $p_k = p_k(Q_i, P_i)$ wird (i) in Q, P dargestellt

damit ist H' vollständig in den neuen Koordinaten gegeben,
mittels der Hamiltongleichungen f. Q, P ist das Problem vollständig formuliert

Beispiel Dipolnäherung f. geladene Teilchen (Ladung q)
im elektromagnetischen Feld

$$H = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi \qquad \vec{E} = \vec{E}_T + \vec{E}_L$$

$$= -\partial_t \vec{A} - \vec{\nabla}\phi$$

1) Dipolnäherung: $\vec{E}(\cancel{\vec{r}},t) = \vec{E}(t) = -\partial \vec{A}(\cancel{\vec{r}},t) - \underbrace{\vec{\nabla}\left(-\vec{r}\cdot\vec{E}_L(\cancel{\vec{r}},t)\right)}$

$\vec{E}_T + \vec{E}_L = \vec{E}(t)$

4) man möchte $\vec{E}(t)$ in der H stehen haben weil das eine meßbare Größe ist: $H(A,\phi) \to H(E)$

wähle den R_2: $R_2(\vec{r},\vec{P},t) = q\vec{r}\cdot\vec{A}(t) + \vec{P}\cdot\vec{r}$

(i) $$H' = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\phi + q\vec{r}\cdot\partial_t\vec{A}(t)$$

(ii) $$\vec{R} = \vec{\nabla}_{\vec{p}} R_2 \quad \left(\hat{=} \quad Q_k = \partial_{P_k} R_2\right)$$

$$\vec{R} = \vec{r} \quad \left(\hat{=} \quad q_k = q_k(Q_i, P_i)\right)$$

$$\vec{p} = \vec{\nabla}_r R_2 \quad \left(\hat{=} \quad p_k = \partial_{q_k} R_2\right)$$

$$= q\vec{A} + \vec{P} \quad \left(\hat{=} \quad p_k = p_k(Q_i, P_i)\right)$$

$$\Rightarrow \quad H'(\vec{R},\vec{P}) = \frac{\vec{P}^2}{2m} + q\phi(R,t) + q\vec{R}\cdot\partial_t\vec{A}(t)$$

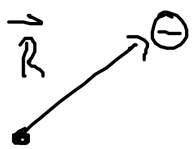
$$= \frac{\vec{P}^2}{2m} - q\left(\vec{R}\cdot\vec{E}_L(t)\right) - q\vec{R}\cdot\vec{E}_T(t)$$

$$= \frac{\vec{P}^2}{2m} - q\,\vec{R}\cdot\vec{E}(t)$$

es gibt nicht $\vec{A}, \phi$
sondern $\vec{E}$ als messbare Größe

$$= \frac{\vec{P}^2}{2m} - \vec{d}\cdot\vec{E}(t)$$

kinetische Energie d. Elektrons + Energie d. Elektrons im Feld $\underline{\underline{\vec{E}(t)}}$



$\vec{d} = q\,\vec{R}$ Dipolmoment d. Elektrons

4.3. Hamilton-Jacobi-Theorie

kanonische Gl. in den neuen Koordinaten

$$\dot{P}_k = -\frac{\partial H'}{\partial Q_k}\ , \qquad \dot{Q}_k = \frac{\partial H'}{\partial P_k}$$

möglichst einfaches Problem erzeugen, indem $H' = 0$ (dann $\dot{P}_k = \dot{Q}_k = 0 \Rightarrow P_k, Q_k$ sind konstant)
kann u.U. durch eine kanonische Trafo gefunden werden

wissen: $H' = H + \partial_t R_2$

$$\overset{H'}{\underset{0}{\parallel}} = H + \partial_t R_2$$

Bestimmungsgleichung von $R_2(q_k, P_k, t)$

$$H(q_k, p_k, t) + \partial_t R_2(q_k, P_k, t) = 0$$

$$p_k = \partial_{q_k} R_2$$

partielle Ableitg.

$$H\left(q_k, \frac{\partial}{\partial q_k} R_2(q_k, P_k), t\right) + \partial_t R_2(q_k, P_k, t) = 0$$

alle in Koordinaten q_k, P_k gegeben

→ partielle Dgl. f. R_2 in q_k, P_k.

Notation oft R_2 wird oft W genannt

ist aber auch gleich Wirkung S (z.z.)

$$\boxed{R_2 = W = S}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L$$

Hamilton-Jacobi-Gleichg. f. Erzeugende S, R_2, W

$$H(q_k, \partial_{q_k} W, t) + \partial_t W(q_k, P_k, t) = 0$$

c/ Die Hamilton gl. sind ersetzt durch eine partielle Dgl. f. W

die $\int$ $\underbrace{\text{Parameter}}_{P_k}$ enthält und $\int$ $\underbrace{\text{Variable}}_{q_k}$ hat

q_k : bestimmen die Ableitg. v W

b/ Bsp. freies Teilchen

$$H = \frac{p_x^2}{2m} \quad , \quad W = W(x, P_x, t)$$

$$H(x, \partial_x W, t) + \partial_t W(x, P_x, t) = 0$$

$$\frac{(\partial_x W)^2}{2m} + \partial_t W = 0$$ diese partielle Dgl ist zu lösen

$$W = P_x x - \frac{1}{2m} P_x^2 t$$ Beweis durch Einsetzen

$$\underline{\underline{X}} = ? = \partial_{P_x} W = \underbrace{x - \frac{p_x}{m} t}_{} = \text{Konstant}$$

$= 0$ oder Konst

gleichförmige Bewegg.

$$x \sim \frac{p_x}{m} t = v_x t$$

Die kanonische Trafo vermittelt zwischen Laborsystem

und dem mitbewegt System, in dem X = konstant ist.

man erkennt Aspekte der Quantenmechanik:

$$W = p_x x - \underbrace{\frac{p_x^2}{2m}}_{E} t = \underbrace{p_x}_{\hbar k_x} x - \underbrace{E}_{\hbar\omega} t = \hbar \underbrace{(k_x x - \omega t)}_{\text{Phase ein Welle}}$$

es gilt u.U. ein Formulierg. die

die Mechanik mit $\psi(x,t) \sim e^{i(k_x x - \omega t)}$

$\swarrow$

Schrödinger gl. f. Welle ψ

c) W ist die Wirkg. S, $S = \int dt' \, L(t') = W$ $\quad$ $S = W$

Es ist zu zeigen: $\frac{d}{dt} W = L$

P_k konstant

$$\frac{d}{dt} W(q_k, P_k, t) = \sum_k \Big(\underbrace{\frac{\partial W}{\partial q_k}}_{= p_k} \dot q_k + \underbrace{\frac{\partial W}{\partial P_k} \dot P_k}_{=0} \Big) + \frac{\partial W}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} W = \sum_k p_k \dot q_k - H$$

Hamilton-Jacobi gl.

$$\Big(H = \sum_k p_k \dot q_k - L \Big)$$

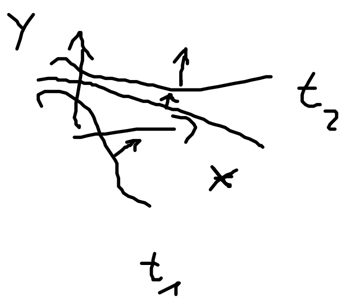
$\longrightarrow \quad \frac{d}{dt} W = L$

<u>damit ist $W = S$!</u>

<u>d) Interpretation von W / S :</u>

man spricht von Führungswellen eines Teilchens !

Fläche gleicher Phase ansehen.



f t_1 = konstant sucht man zu S = konstant

die zugehörige Fläche

$\rightarrow S$: Wellen interpretation

Weiter : $p = \partial_q S$

$\vec{p} = \vec{\nabla}_r S \quad \perp$ auf Fläche konstanter Wirkg.

Beweg. // zu $\vec{p}$ erfolgt $\perp$ zu Äquiwirkungsflächen

$\exists$ Zshg. mit Optik „Eikonalgleichung"

e) Wenn H nicht von der Zeit abhängt,

so ist ein Separationsansatz

$$S(q_k, P_k, t) = \underbrace{-Et}_{\substack{\text{zeitabhängig} \\ E = \text{konstante}}} + \underbrace{\bar{S}(q_k, P_k)}_{\text{ortsabhängig}} \quad \text{möglich.}$$

$$H(q_k, \partial_{q_k} S) + \partial_t S = 0$$

$$H(q_k, \partial_{q_k} \bar{S}) - E = 0$$

$$\boxed{H(q_k, \partial_{q_k} \bar{S}) = E = \text{konst}}$$

Gleichg. f. $\bar{S}$, nicht zeitabhängig

stationäre H-J Gleichg → einfacher

Vorgehensweise f. Hamilton-Jacobi-Theorie

1) man besorge sich $H(q_k, p_k, t)$

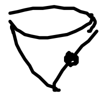
2) man schreibe die H-J. Gleichg. auf: $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}$

3) zunächst Separationsansatz um Zeit / Ort zu trennen

4) wenn S gefunden ist, so bekommt man Bahnkurven Q_k

und $Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} = \underbrace{\text{funktion}\,(q_k, P_k, t) = \text{konstant}}_{\underbrace{q_k = q_k(P_k, t)}_{\text{Bahnkurve}}}$

$\uparrow$ Konstante in S



<u>Beispiel:</u> Teilchen auf Kegel mit Schwerkraft

zu 1) $H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha} + mgr\cos\alpha$ (ZVL vorher)

zu 2/3) $\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial \bar S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\alpha}\left(\frac{\partial \bar S}{\partial \varphi}\right)^2\right\} + mgr\cos\alpha = E$

ist bereits separiert in Zeit

$\bar S = \bar S(r, \varphi)$

weiter hin: $\bar S = S_r(r) + S_\varphi(\varphi)$

$$\boxed{\frac{r^2\sin^2\alpha}{2m}(\partial_r S_r)^2 + \frac{1}{2m}(\partial_\varphi S_\varphi)^2 + mgr\cos\alpha\sin^2\alpha\, r^2 = r^2\sin^2\alpha\, E}$$

$\underbrace{(\partial_\varphi S_\varphi)^2}_{\text{alle } \varphi} = \underbrace{2mr^2\sin^2\alpha\left(E - mgr\cos\alpha - \frac{1}{2m}(\partial_r S_r)^2\right)}_{\text{alle } r}$ = Konstante nicht von r, φ abhängig

Abhängigk. Abhängigkeit $\equiv \alpha_\varphi^2$

Drehimpuls

umstellen nach $\partial_r S_r$:

$$\partial_r S_r = \left(2m \left\{ E - mgr\cos\alpha - \frac{\alpha_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\alpha} \right) \right)^{1/2}$$

das Problem zerfällt also in $S_\varphi + S_r = \bar{S}$,

jedes S_φ, S_r erfüllt getrennte Dgl.

$\to S_r, S_\varphi$: kann durch gewöhnliche Dgl. beschrieben werden.

zu 4) trenne die Variablen $\frac{d}{dr} S_r = f(r) \longrightarrow$ elliptische Integrale

Grenzfall $\alpha_\varphi = 0$ (Kugel rollt nach unten)

Drehimpuls $= 0$

$$\Rightarrow S_r = (2m)^{1/2} \left(E - mgr\cos\alpha \right)^{3/2} \left(-\frac{2}{3} \frac{1}{mg\cos\alpha} \right)$$

Bahnkurve : S muß nach Impulsen abgeleitet werden.

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} \quad , \quad P_k \text{ wählen: } E, \alpha_\varphi$$

$\Downarrow$ konstant

$$S = S_\varphi + S_r - Et$$

$$\text{konstant} = \frac{\partial S}{\partial E} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m}\, g \cos\alpha}\left(E - mgr\cos\alpha\right)^{1/2} - t$$

Bahnkurve: $r = r_0 - \frac{t^2}{2} g \cos\alpha$ o.B.

unter Verwendg. v. AB