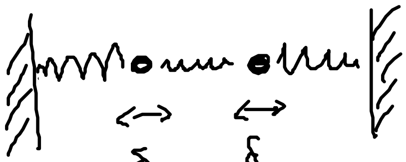
Diskussion der Normalmoden δ_+ , δ_-



$\delta_1 \quad \delta_2$

$$\delta_1 = x_1 - x_1^0$$

$$\delta_2 = x_2 - x_2^0$$

$$\underbrace{\delta_+ = \delta_1 + \delta_2 , \quad \delta_- = \delta_1 - \delta_2}_{\text{Trafo}} , \quad \underbrace{\delta_1 = \frac{\delta_+ + \delta_-}{2} , \quad \delta_2 = \frac{\delta_+ - \delta_-}{2}}_{\text{Rücktrafos}}$$

(i) $\underbrace{\delta_+ = 0}_{\text{schwingt nicht}} \rightarrow \delta_-$ Mode ist bestimmt durch $\delta_1 = - \delta_2$

•→ ←• gegenphasiges Schwingen

(ii) $\underbrace{\delta_- = 0}_{\text{Mode schwingt nicht}} \rightarrow \delta_+$ Mode bestimmt durch $\delta_1 = \delta_2$

•→ •→

Jede Bewegung des Systems ist durch Überlagerung ausdrückbar.
durch die Rücktransformation $\delta_+(t) , \delta_-(t) \Longrightarrow \delta_1(t) , \delta_2(t)$

allgemeine Lösg. $\delta_\pm = A_\pm \cos(\omega_\pm t + \varphi_\pm)$

Amplitude   bekannt

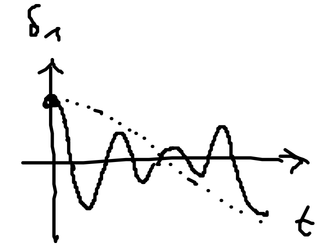
Anfangsbedingungen.

AB als Bsp: $\varphi_{\pm} = 0$, $A_{\pm} \equiv A$ Additionstheoreme

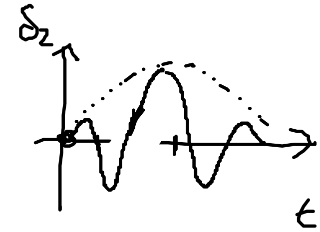
$$\delta_1 = A\left(\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)\right) =$$

$$\delta_2 = A\left(\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)\right) =$$

$$\delta_1 = 2A \cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right)$$



$$\delta_2 = -2A \sin\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t\right)$$



es treten Oszillation mit $\omega_+ \pm \omega_-$ auf   Schwebungen

Interpretation: δ_1 überträgt seine Anfangsenergie auf δ_2

danach periodisch hin- und her.

Beispiel: Energietransfer in Photosynthese: Kopplg. zw. Molekülen

Farbstoffmoleküle / Pigmente

stellen optimierte Oszillatoren dar für: Lichtsammeln (Frequenz)

+ Anregungstransport

3. Allgemeine Theorie gekoppelter Schwingg.

N gekoppelte Schwinger in Potential $V(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$

$(\vec{r}_n(t))$

klein $\Rightarrow$ System immer analytisch lösbar

3.1. Lagrangetechnik f. gekoppelte Oszillatoren

N Teilchensystem: $$L = \sum_n \frac{m_n \dot{\vec{r}}_n^{\,2}}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n,m} V(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$$

kinetische E. potentielle Energie

$\vec{r}_n$: $x_{n1}\; x_{n2}\; x_{n3}$ $\quad \forall n \longrightarrow \{q_i\}$ schreiben

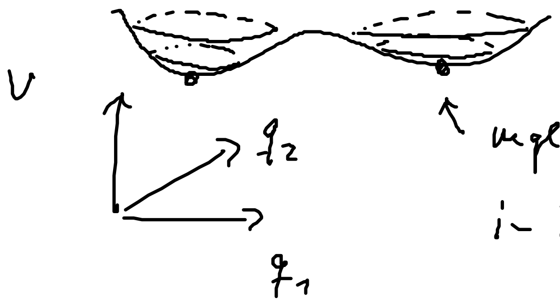
(x, y, z) $\qquad i = 1, \dots, 3N$

f. jeden Massepunkt

$$L = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - V(\{q_i\})$$

Kleine Auslenkungen: q_i soll um ein Ruhelage schwingen

Potentiallandschaft



nehmen Ruhelage q_i^0 und setze $q_i^0 = 0$ im Potentialminimum (KS-Verschiebung)

$$V(\{q_i\}) = V(q_i^0 = 0) + \sum_{q_i} q_i \partial_{q_i} V(q_i)\Big/_{q_i=0}$$

Reihe entwickeln

irrelevant wird als Konstante weg differenziert und trägt nicht zu L-Gleichg. bei

klein

verschwindet im Minimum als 1. Ableitg.

$$+ \frac{1}{2} \sum_{ij} q_i q_j \underbrace{\partial_{q_i} \partial_{q_j} V(\{q_i\})\Big/_{q_i=q_j=0}}_{k_{ij} \,\hat{=}\, \text{Kraftkonstante}}$$

$$\Rightarrow L = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{q}_i^2 - \sum_{ij} \frac{k_{ij}}{2} \underbrace{q_i q_j}$$

nicht diagonal also Kopplg.

gilt also f. klein Auslenkungen q_i

Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} = \frac{\partial}{\partial \dot q_n} \sum_i \frac{m_i}{2} \dot q_i^2 = \sum_i \frac{m_i}{2} 2 \dot q_i \delta_{ni}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q_n} = m_n \dot q_n$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} = -\sum_{ij} \frac{k_{ij}}{2} \left(\delta_{in} q_j + q_i \delta_{jn} \right)$$

$$= -\sum_j k_{nj} q_j \qquad k_{nj} = k_{jn}$$

$$i \to j$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot q_n} = \frac{\partial L}{\partial q_n}$$

$$\rightarrow \quad m_n \ddot q_n + \sum_j k_{nj} q_j = 0$$

n-te Oszillator

koppelt an alle q_j mit Kraftkonstante k_{nj}

<u>Ziel</u> Normalmoden zu finden

$$q_n = \frac{u_n}{\sqrt{m_n}} \qquad \text{neue Koordinate } u_n$$

$$\ddot{u}_n + \sum_j \underbrace{\frac{K_{nj}}{\sqrt{m_n}\sqrt{m_j}}}_{V_{nj}} u_j = 0$$

$$\ddot{u}_n + \sum_j V_{nj} u_j = 0$$

$$u_j = A_j(\omega) e^{i\omega t}$$ Ansatz mit unbekannten ω, A

↑ erinnert an harmonischen Oszillator

Amplitude

einsetzen:

$$-\omega^2 A_n + \sum_j V_{nj} A_j = 0$$

$$\boxed{\sum_j V_{nj} A_j = \omega^2 A_n}$$

$$\hat{V} \vec{A} = \omega^2 \vec{A}$$ Eigenwertproblem

Matrix Zahl

man sucht Eigenwerte ω^2 und Eigenvektor $\vec{A}$ einer

Symmetrische Matrix.

Bemerkg. zur Lösung:

a) Bestimmung von ω^2: um nichttriviale Lösg. $\vec{A}$ zu haben muß Koeffizienten determinante:

$$|\hat{V} - \omega^2 \underline{\underline{1}}| = 0$$

bekannt

→ Gleichg. für ω, es gibt N ω's (N-ter Ordnungs gleichg.)

$\omega = \omega_\alpha \quad \alpha: 1, \dots N$ im allgemeinen

(diese ω stellen die Normalmode des Systems dar)

- Zu jedem ω_α gibt es ein A_n, also A_n^α

symmetrische Matrix hat orthogonale Eigenvektoren, vollständiges System

$$\sum_\alpha A_n^\alpha A_j^\alpha = \delta_{nj}, \quad \sum_j A_j^\alpha A_j^\beta = \delta_{\alpha\beta}$$

- jede Lösg u_i kann durch Überlagerung der Basisvektoren ausgedrückt werden.

$$u_i = \sum_\alpha \eta_\alpha \, A_i(\omega_\alpha) \, e^{\underline{i\omega_\alpha t}}$$

Entwicklungskoeffizient

$$\equiv \sum_\alpha y_\alpha \underline{(t)} \, A_i(\omega_\alpha)$$

neue Normalkoordinaten

wenn das stimmt, dann muß die L in y_α als ungekoppelte Oszillatoren geschrieben werden können. $L = T - V$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i \dot{u}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{\underline{i\alpha\beta}} \dot{y}_\alpha \dot{y}_\beta \, A_{\underline{i}}(\omega_\alpha) \, A_{\underline{i}}(\omega_\beta)$$

$$= \rightarrow \delta_{\alpha\beta}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_\alpha \dot{y}_\alpha^2$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij} u_i u_j = \sum_{\underline{ij}\,\alpha\beta} V_{\underline{ij}} \, y_\alpha y_\beta \, A_i(\omega_\alpha) \, \underline{A_j(\omega_\beta)}$$

$$= \rightarrow \omega_\beta^2 A_i$$

$$= \sum_{i\alpha\beta} y_\alpha y_\beta \, A_i(\omega_\alpha) \, A_i(\omega_\beta) \, \omega_\beta^2$$

$$= \rightarrow \delta_{\alpha\beta}$$

$$= \sum_\alpha \omega_\alpha^2 y_\alpha^2$$

$$\boxed{L = \sum_\alpha \frac{\dot{y}_\alpha^2}{2} - \sum_\alpha \omega_\alpha^2 y_\alpha^2}$$

$V_{ij} q_i q_j$

$V_{ii} q_i^2$

Summe der unabhängigen Oszillatoren

$\ddot{y}_\alpha = -\omega_\alpha^2 y_\alpha$ aus L-Gleichg.

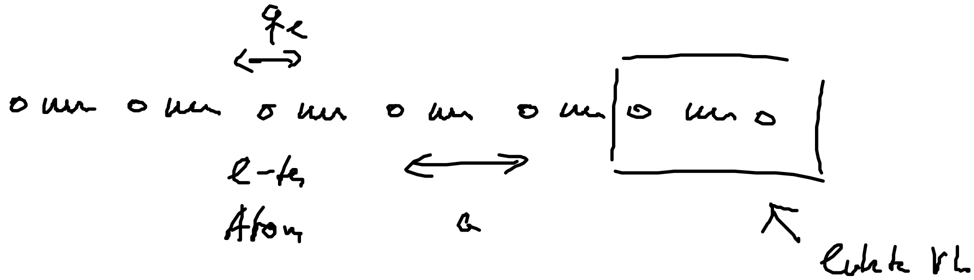
Jedes Problem gekoppelter Schwingungen kann auf unabhängige Schwingungen zurückgeführt werden.

Für Unabhängige Schwingungen ist die Lösung bekannt.

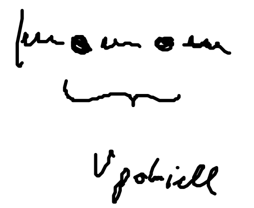
Rückrechenbar auf einzelne Auslenkung.

3.2. Anwendung der Theorie: Schallwellen

kristalliner Festkörper, Atome in harmonischem Potential



$$L = \sum_l \frac{m}{2}\dot{q}_l^2 - \sum_{l,k}\frac{K_{lk}}{2} q_l q_k$$



$$= \sum_l \frac{m}{2}\dot{q}_l^2 - \sum_l \frac{K}{2}\left(q_l - q_{l+1}\right)^2$$

(Paar)

$$\sum_l \frac{K}{2}\left(\underline{q_l^2} - 2 q_l q_{l+1} + \underline{q_{l+1}^2}\right)$$

$l \to l-1$ $\qquad$ $l \to l-1$

$$-q_{l-1} q_l - q_l q_{l+1}$$

$$L = \sum_l \frac{m}{2}\dot{q}_l^2 - \sum_l \frac{K}{2}\left(\underline{2 q_l^2} - q_{l-1} q_l - q_l q_{l+1}\right)$$

$t \to \omega$

Ansatz: $q_l = q(t)\, e^{iQal}$ (Fourierreihe) $\qquad l \to Q$

Q wie Wellenzahl (Fourierfrequenz)

einsetzen:

$$L = \sum_l \frac{m}{2} \dot{q}^2 e^{2iQal} - \sum_l K q^2(t) e^{2iQal} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} e^{-iQa} - \frac{1}{2} e^{+iQa}\right)}_{1-\cos(Qa)}$$

sieht aus wie ungekoppelt

Eigenwertgleichg. f. Schwingungsmoden:

$$\left\| V_{nj} - \omega^2 \delta_{nj} \right\| = 0$$

abgeschrieben v. oben

V_{nj} an L ablesen

$$\left\| \begin{matrix} \underbrace{\frac{2K}{m}(1-\cos(aQ)) - \omega^2}_{\text{einziger Eintrag}} & 0 \\ 0 & \ddots \end{matrix} \right\|$$

$$\to \omega^2 = \frac{2K}{m}\left(1 - \cos(aQ)\right)$$

$$\boxed{\omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \left| \sin\left(\frac{Qa}{2}\right) \right|}$$

Bemerkg: a) ω ist Normalmode, abhängig von Q

Licht: $\omega = c k$

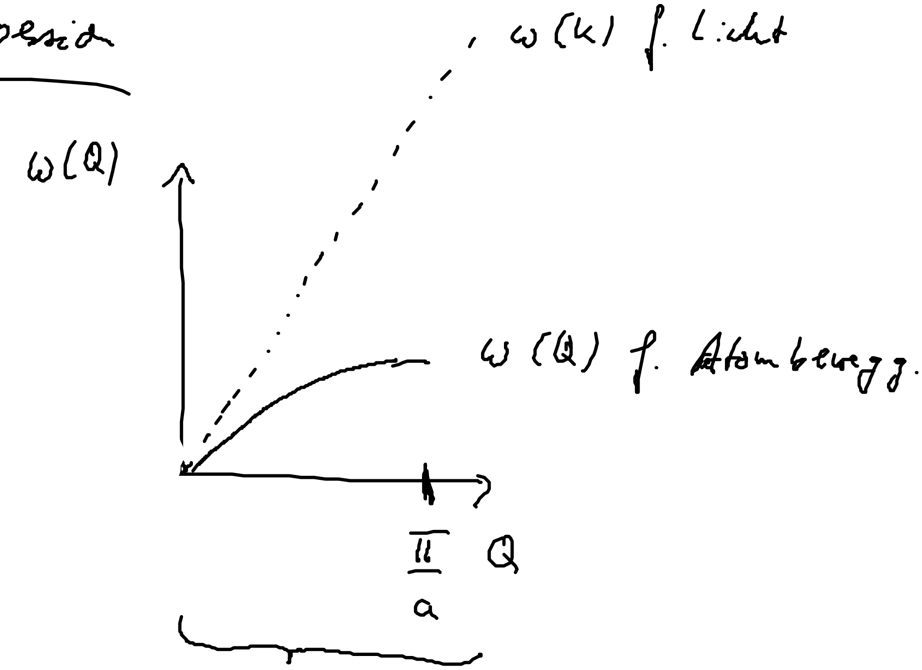
Frequ.   Wellenzahl

<u>hier</u> $\omega = \omega(Q)$ <u>Dispersionsrelation</u>

b) allgem. Lsg.:

$$q_l = \sum_Q c_Q \, e^{iQal} \, e^{i\omega(Q)t}$$

c) <u>Dispersion</u>



Schallwellen mit Dispersion $\omega(Q)$

$$\underbrace{\lambda = \frac{2\pi}{Q}}$$

es existiert ein minimales λ, also ein größtmögl. Q:

$$\lambda_{min} = \frac{2\pi}{Q_{max}}$$