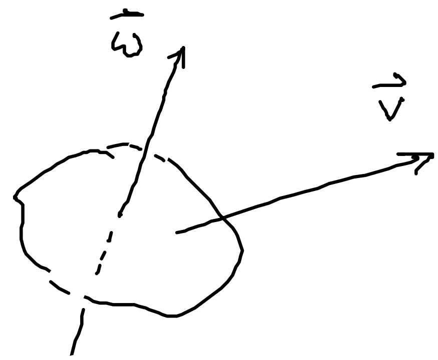
4. Starrer Körper

Starrer Körper: Massepunktsystem bei dem Abstand der Massepunkte untereinander zeitlich konstant (starr) ist.

Freiheitsgrade d. SK:



momentane Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

momentane Bewegungsrichtung: Geschwindigkeit d. Schwerpunkts (3 Freiheitsgrade)

Achse: durch 2 Parameter festgelegt

+ Rotation um Achse: 1 Parameter (3 Freiheitsgrade)

insgesamt liegen also 6 Freiheitsgrade vor:

3 Freiheitsgrade der Translation / 3 Freiheitsgrade d. Rotation

Spezielle Fälle:

a) Kreisel: an einem Punkt fest lagern $\rightarrow$ 3 FG d. Rotation

b) Pendel: – " –

+ Rotation um 1 feste Achse: 1 FG d. Rotation

Sinnvolle Größe um Bewegg. zu beschreiben : Kinematik 4.1.

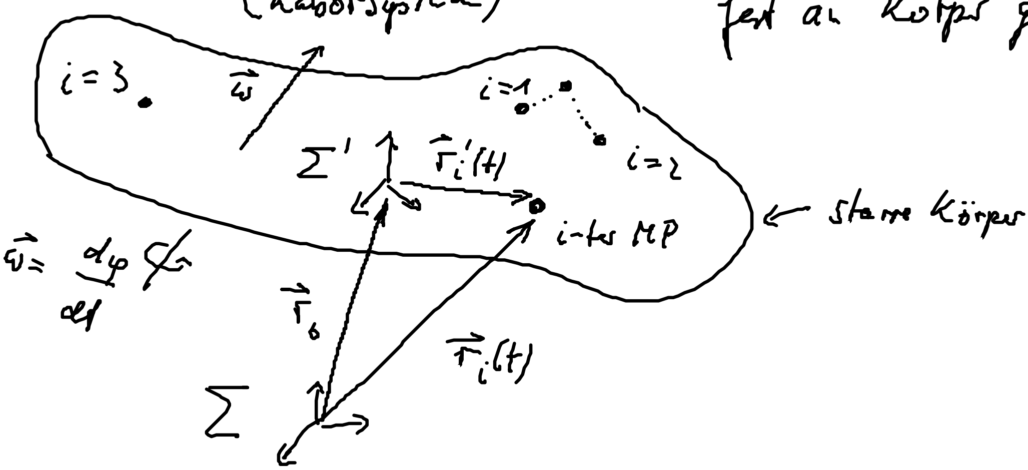
Später: Dynamik: d.h. Kräfte auf SK wirken lassen 4.2.

4.1. Kinematik

4.1.1. Beschreibung mittels zweier Koordinatensysteme

Σ : raumfestes KS , Σ' körperfestes KS (mitbewegt)

(Laborsystem) fest an Körper gebunden



$\vec{r}_0$: zeigt auf festen Punkt im SK

oft wird $\vec{r}_0$ als der Schwerpunkt

Σ' wird später als im lokalisiert angenommen

Ort d. i-ten Massepunkt : $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_i\,'(t)$

Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}_i(t) = \dot{\vec{r}}_0(t) + \cancel{\dot{\vec{r}}_i'(t)} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i'(t)$

$\cancel{\dot{\vec{r}}_i'(t)}$: Änderung v. $\vec{r}_i'(t)$ bzgl. Σ' $= 0$, denn $\exists$ starre Verbindung zwischen $\vec{r}_0$ und $\vec{r}_i'$

$\vec{\omega} \times \vec{r}_i'(t)$: Anteil der Rotation (siehe Scheinkräfte)

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i'$$

Umrechnung der Geschwindigkeit in Σ, Σ'

4.1.2. kinetische Energie, Trägheitstensor und Drehimpuls

a) kinetische Energie

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right)^2$$

Vorbetrachtg. $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} \sum_i m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i{}')$

(Def. d. Schwerpunkts)

jetzt $\vec{r}_0 = \vec{R}$ wähle :

$\underline{\vec{R}} = \frac{1}{\cancel{M}} \sum_i \cancel{m_i} \underline{\vec{R}} + \sum_i m_i \vec{r}_i{}'$ $\boxed{\rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i{}' = 0}$

wenn $\vec{r}_0 \equiv \vec{R}$

$$T = \underline{\sum_i \frac{m_i}{2}} \left(\dot{\vec{r}}_0^{\,2} + 2 \dot{\vec{r}}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \underline{\vec{r}_i{}'}) + (\vec{\omega} \times \vec{r}_i{}')^2 \right)$$

Mischterm verschwindet wg. $\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = 0$

$$T = \underbrace{\frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2}_{\text{kinetische E der Translation}} + \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_i{}')^2}_{\text{Rotationsenergie } T_{rot} \text{ des Massepunktsystems}}$$

$(\vec{A} \times \vec{B})^2 = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$ nutzen $\vec{A} = \vec{\omega}$, $\vec{B} = \vec{r}_i{}'$

$\vec{r}_i{}' = (x_1'(i), x_2'(i), x_3'(i))$

$$T_{rot} = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\overbrace{\sum_k \omega_k^2}^{A^2} \overbrace{\sum_m x_m'^2(i)}^{B^2} - \overbrace{\sum_k \omega_k x_k'(i) \sum_l \omega_l x_l'(i)}^{(\vec{A} \cdot \vec{B})^2} \right)$$

$$\left(T_{trans} = \frac{M}{2} v^2 \right. \longrightarrow \text{gibt so was auch bei Rotation}$$

$$\vec{v} \rightarrow \vec{\omega}$$

daher Versuch, Drehgeschwindigkeit auszuklammern)

$$\omega_k^2 = \omega_k \sum_l \omega_l \delta_{kl}$$

$$T_{rot} = \underbrace{\underline{\sum_i \frac{m_i}{2}} \sum_{k,l} \underline{\left(\sum_m x'^2_m(i)\, \delta_{lk} - x'_k(i)\, x'_l(i) \right)}}_{\text{Eigenschaft d. Körpers (Geometrie, Massenverteilg.)}} \underbrace{\omega_k \omega_l}_{\text{Drehgeschwindigkeit}}$$

$$T_{rot} = \sum_{k,l} \frac{\Theta_{kl}}{2} \omega_k \omega_l$$

mit Matrixdefinition: $\Theta_{kl} = \sum_i m_i \left(\sum_m x'^2_m(i)\, \delta_{kl} - x'_k(i)\, x'_l(i) \right)$

Trägheitsmatrix d. starren Körpers (3×3)

→ definiert einen Tensor, den Trägheitstensor

- Rotationsenergie ist durch Trägheitstensor $\hat{\Theta}$ bestimmt über Matrix Θ_{kl}

und die Winkelgeschwindigkeit. Analogie: $\frac{M}{2}\vec{v}^2 \longleftrightarrow \vec{\omega}\,\frac{\hat{\theta}}{2}\,\vec{\omega}$

- θ_{ke} wird berechnet in Σ', wobei Koordinatenursprung im Schwerpunkt liegt, bisher noch keine Orientierung v. Σ' diskutiert
(es gibt günstige und ungünstige insbesondere $\theta_{ke} \sim \delta_{ke}$ wäre toll!)

b) Trägheitsmatrix

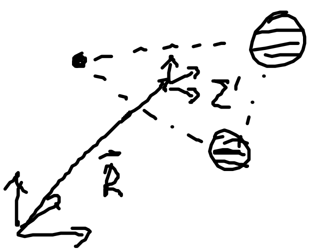
$$\theta_{ke} = \begin{pmatrix} \theta_{11}: \sum_i m_i\left(y'^2(i) + z'^2(i)\right) & \theta_{12}: -\sum_i m_i x'(i)y'(i) & \theta_{13}: -\sum_i m_i x'(i)z'(i) \\ \theta_{21}: -\sum m_i\, y'(i)x'(i) & \theta_{22}: \sum_i m_i\left(x'^2(i) + z'^2(i)\right) & \theta_{23}: -\sum_i y'(i)z'(i) \\ \theta_{31}: -\sum_i m_i\, z'(i)x'(i) & \theta_{32} -\sum_i m_i\, z'(i)y'(i) & \theta_{33}: \sum_i m_i\left(x'^2(i) + y'^2(i)\right) \end{pmatrix}$$

$$x_1' = x', \quad x_2' = y', \quad x_3' = z'$$

θ_{ke} kann berechnet werden wenn alle Koord. $x_e(i)$ und m_i bekannt

$\hat{\theta}$ ist eine symmetrische Matrix $\theta_{ke} = \theta_{ek}$ (hat Folgen)

Bsp für konkretes Vorgehen



1. Schritt: Schwerpunkt suchen, $\vec{R} = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3)$

2. Schritt: Σ' verankern (Koordinatenursprung)

3. Schritt: festlegen der $x'_k(i)$ aller MP in Σ'

4. Schritt: Θ_{kl} ausrechnen

$$\Theta_{xx} = \Theta_{11} = \sum_{i=1}^{3} m_i \left(y^2(i) + z^2(i) \right)$$

m_i festlegen

Bisher können wir bei gegebenem $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

die kinetische E. über die Trägheitsmatrix berechnen.

$$(\dot{mv}) = \vec{F}$$

c) Drehimpuls

Später: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ deswegen $\vec{L}$ ansehen.

$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$ Def. d. Drehimpuls f. Massenpkt.-system

Analogie zu $\frac{d}{dt} m\vec{v} = f$ in $\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{M}$ finden

kann man $\vec{L} = \vec{L}(\hat{\Theta}, \vec{\omega})$?

Umrechnung $\Sigma \to \Sigma'$

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left(\vec{r}_0 + \vec{r}_i'\right) \times \left(\dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}_i'\right)$$

$$= \underline{\sum_i m_i} \left(\vec{r}_0 \times \dot{\vec{r}}_0 + \vec{r}_0 \times \underline{\dot{\vec{r}}_i'} + \underline{\vec{r}_i'} \times \dot{\vec{r}}_0 + \vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i'\right)$$

es gilt $\underline{\sum_i m_i \vec{r}_i'} = 0$ wenn $\vec{r}_0 = \vec{R}$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{\Sigma} \neq \frac{d}{dt}\Big|_{\Sigma'}$$

$$= M \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i' \times \dot{\vec{r}}_i'}_{\underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i' \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i'\right)}_{\vec{L}_{rot}}}$$

Drehimpuls d. Schwerpunktbeweg.

$\vec{L}_{rot}$ Drehimpuls d. Rotation

$$\vec{L}_{rot} = \sum_i m_i \overset{A}{\vec{r}_i'} \times \left(\overset{B}{\vec{\omega}} \times \overset{C}{\vec{r}_i'}\right) \overset{?}{=} \vec{L}_{rot}\left(\hat{\theta}, \vec{\omega}\right)$$

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$

$$\vec L_{rot} = \sum_i m_i \left(\vec\omega\,(\vec r_i{}' \cdot \vec r_i{}') - \vec r_i{}'\,(\vec\omega \cdot \vec r_i{}') \right)$$

$$= \sum_i m_i \left(\sum_m x_m'^2(i) \underline{\sum_k \vec e_k{}'\, \omega_k} - \underline{\sum_k \vec e_k{}'\, x_k'(i)} \sum_l \omega_l\, x_l'(i) \right)$$

$$\vec L_{rot} = \underline{\sum_k \vec e_k} \sum_i m_i \left(\sum_m x_m'^2(i)\, \omega_k - x_k'(i) \underline{\underline{\sum_l}}\, x_l'(i)\, \omega_l \right)$$

rausziehen

$$= \sum_{k,l} \vec e_k \sum_i m_i \left(\sum_m x_m'^2(i)\, \omega_l\, \delta_{lk} - x_k'(i)\, x_l'(i)\, \omega_l \right)$$

$$\vec L_{rot} = \sum_{k,l} \vec e_k{}'\, \Theta_{kl}\, \omega_l = \sum_k \underbrace{\sum_l \Theta_{kl}\, \omega_l}_{L_{k,rot}}\, \vec e_k$$

d.h.: $L_{k,rot} = \sum_l \Theta_{kl}\, \omega_l$ definiert Matrixmultiplikation

$\vec L_{rot} = \hat\Theta\, \vec\omega$ Darstellg. d. Drehimpulses über die Trägheitsmatrix (analog $\vec p = m \vec v$)