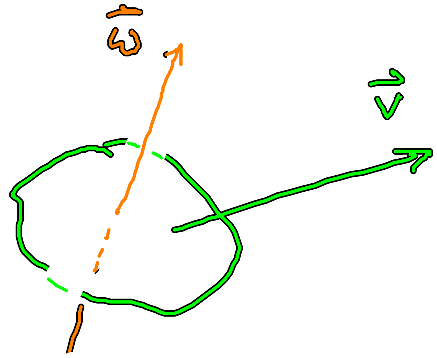
4. Starrer Körper

Starrer Körper: Massepunktsystem bei dem Abstand der Massepunkte untereinander zeitlich konstant (starr) ist.

Freiheitsgrade d. SK:



momentane Rotationsgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

Achse: durch 2 Parameter festgelegt

+ Rotation um Achse: 1 Parameter (3 Freiheitsgrade)

momentane Bewegungsrichtung: Geschwindigkeit d. Schwerpunkts (3 Freiheitsgrade)

insgesamt liegen also 6 Freiheitsgrade vor:

3 Freiheitsgrade der Translation / 3 Freiheitsgrade d. Rotation

spezielle Fälle:

a) Kreisel: an einem Punkt fest lagern $\rightarrow$ <u>3 FG d. Rotation</u>

b) Pendel: — " —

+ Rotation um 1 feste Achse: 1. FG d. Rotation

Sinnvolle Größe um Bewegg. zu beschreiben : Kinematik 4.1.

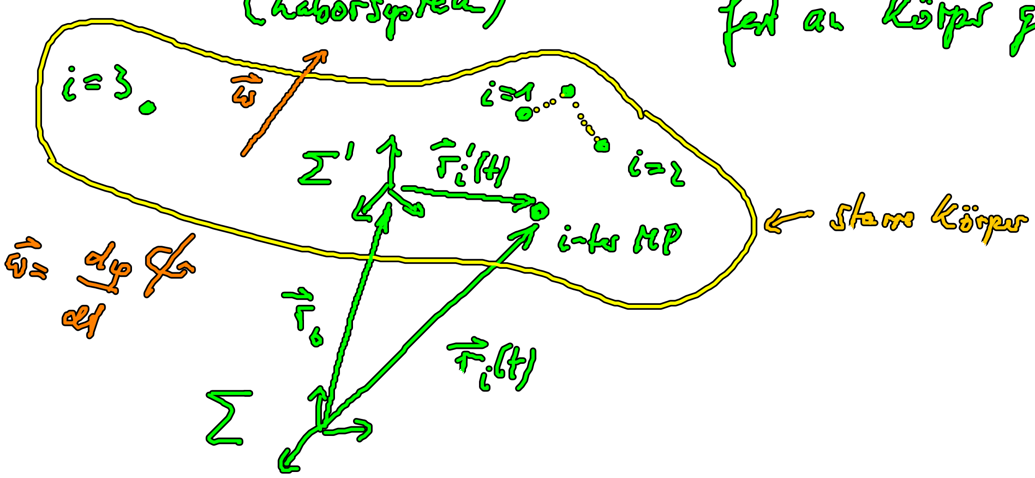
Später : Dynamik : d.h. Kräfte auf SK wirken lassen 4.2.

4.1. Kinematik

4.1.1. Beschreibung mittels zweier Koordinatensysteme

Σ : raumfestes KS , Σ' körperfestes KS (mitbewegt)

(Laborsystem) fest an Körper gebunden



$\vec{r}_0$: zeigt auf festen Punkt im SK

oft wird $\vec{r}_0$ als der Schwerpunkt

Σ' wird später als im lokalisiert angenommen

Ort d. i-ten Massenpunkt : $\vec{r}_i(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_i'(t)$

<u>Geschwindigkeit</u>

$$\dot{\vec r}_i(t) = \dot{\vec r}_0(t) + \underbrace{\cancel{\dot{\vec r}_i{}'(t)}}_{\substack{\text{Änderung v. } \vec r_i{}'(t) \text{ bzgl. } \Sigma' \\ = 0 \text{, denn } \exists \text{ starre Verbindung} \\ \text{zwischen } \vec r_0 \text{ und } \vec r_i{}'}} + \underbrace{\vec\omega \times \vec r_i{}'(t)}_{\substack{\text{Anteil der Rotation} \\ \text{(siehe Schreibhefte)}}}$$

$$\dot{\vec r}_i = \dot{\vec r}_0 + \vec\omega \times \vec r_i{}'$$

Umrechnung der Geschwindigkeit in Σ, Σ'

4.1.2. kinetische Energie, Trägheitstensor und Drehimpuls

a) kinetische Energie

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec r}_i^{\,2} = \sum_i \frac{m_i}{2} \left(\dot{\vec r}_0 + \vec\omega \times \vec r_i{}' \right)^2$$

Vorbetrachtg. $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M}\sum_i m_i \left(\vec{r}_0 + \vec{r}_i{}'\right)$

(Def. d. Schwerpunkts)

jetzt $\vec{r}_0 = \vec{R}$ wähle:

$$\vec{R} = \frac{1}{\cancel{M}}\sum_i \cancel{m_i}\,\vec{R} + \sum_i m_i \vec{r}_i{}' \qquad \boxed{\rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i{}' = 0}$$

wenn $\vec{r}_0 \equiv \vec{R}$

$$T = \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\dot{\vec{r}}_0^{\,2} + 2\dot{\vec{r}}_0 \cdot \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i{}'\right) + \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i{}'\right)^2\right)$$

Mittelterm verschwindet wg. $\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = 0$

$$T = \underbrace{\frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2}_{\text{kinetische E der Translation}} + \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_i{}'\right)^2}_{\text{Rotationsenergie } T_{rot} \text{ des Massenpunktsystems}}$$

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^2 = A^2B^2 - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)^2$$

nutzen $\vec{A} = \vec{\omega}$, $\vec{B} = \vec{r}_i{}'$

$\vec{r}_i{}' = \left(x_1'(i), x_2'(i), x_3'(i)\right)$

$$T_{rot} = \sum_i \frac{m_i}{2}\left(\overbrace{\sum_k \omega_k^2}^{A^2}\ \overbrace{\sum_m x_m'^2(i)}^{B^2} - \overbrace{\sum_k \omega_k x_k'(i)\sum_l \omega_l x_l'(i)}^{(\vec{A}\cdot\vec{B})^2}\right)$$

($T_{trans} = \frac{M}{2} v^2$ → gilt so wie auch bei Rotation

$\vec{v} \to \vec{\omega}$

daher Vermutung, Drehgeschwindigkeit aus zu klammern)

$$\omega_k^2 = \omega_k \sum_l \omega_l \delta_{kl}$$

$$T_{rot} = \underbrace{\sum_i \frac{m_i}{2} \sum_{k,l} \left(\sum_n x'^2_n(i)\, \delta_{lk} - x'_k(i)\, x'_l(i) \right)}_{\text{Eigenschaft d. Körpers (Geometrie, Massenverteilg.)}} \underbrace{\omega_k \omega_l}_{\text{Drehgeschwindigkeit}}$$

$$T_{rot} = \sum_{k,l} \frac{\Theta_{kl}}{2} \omega_k \omega_l$$

mit Matrixdefinition: $\Theta_{kl} = \sum_i m_i \left(\sum_n x'^2_n(i)\, \delta_{kl} - x'_k(i)\, x'_l(i) \right)$

Trägheitsmatrix d. starren Körpers (3×3)

→ definiert ein Tensor, den Trägheitstensor

- Rotationsenergie ist durch Trägheitstensor $\hat{\Theta}$ bestimmt über Matrix Θ_{kl}

und die Winkelgeschwindigkeit. Analogie: $\frac{M}{2}\vec{v}^2 \longleftrightarrow \vec{\omega}\,\frac{\hat{\Theta}}{2}\,\vec{\omega}$

- Θ_{kl} wird berechnet in Σ', wobei Koordinatenursprung im Schwerpunkt liegt,

  bisher noch keine Orientierung v. Σ' diskutiert

  (es gibt günstige und ungünstige insbesondere $\Theta_{kl} \sim \delta_{kl}$ wäre toll!)

b) Trägheitsmatrix

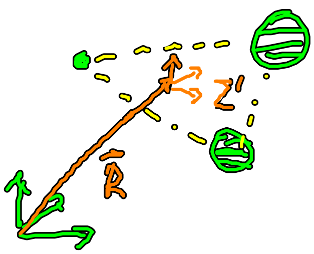
$$\Theta_{kl} = \begin{pmatrix} \Theta_{11}: \sum_i m_i \left(y'^2(i) + z'^2(i)\right) & \Theta_{12}: -\sum_i m_i x'(i) y'(i) & \Theta_{13}: -\sum_i m_i x'(i) z'(i) \\ \Theta_{21}: -\sum_i m_i y'(i) x'(i) & \Theta_{22}: \sum_i m_i \left(x'^2(i) + z'^2(i)\right) & \Theta_{23}: -\sum_i y'(i) z'(i) \\ \Theta_{31}: -\sum_i m_i z'(i) x'(i) & \Theta_{32}: -\sum_i m_i z'(i) y'(i) & \Theta_{33}: \sum_i m_i \left(x'^2(i) + y'^2(i)\right) \end{pmatrix}$$

$$x_1' = x', \quad x_2' = y', \quad x_3' = z'$$

Θ_{kl} kann berechnet werden wenn alle Koord. $x_l(i)$ und m_i bekannt

$\hat{\Theta}$ ist eine symmetrische Matrix $\Theta_{kl} = \Theta_{lk}$ (hat Folgen)

Bsp für konkretes Vorgehen



1. Schritt: Schwerpunkt suchen, $\vec R = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}(m_1\vec r_1 + m_2\vec r_2 + m_3\vec r_3)$

2. Schritt: Σ' verankern (Koordinatenursprung)

3. Schritt: festlegen der $x'_k(i)$ aller MP in Σ'

4. Schritt: Θ_{kl} ausrechnen

$$\Theta_{xx} = \Theta_{11} = \sum_{i=1}^{3} m_i \left(y^2(i) + z^2(i) \right)$$

m_i festlegen

Bisher können wir bei gegebenem $\vec\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$

die kinetische E. über die Trägheitsmatrix berechnen.

$$(m\dot v) = \vec F$$

c) Drehimpuls

Später: $\frac{d\vec L}{dt} = \vec M$ daher wegen $\vec L$ anschauen.

$$\vec L = \sum_i m_i \, \vec r_i \times \dot{\vec r}_i$$

Def. d. Drehimpuls f. Massepkt.-system

Analogie zu $\frac{d}{dt} m\vec v = f$ in $\frac{d}{dt}\vec L = \vec M$ finden

kann man $\vec L = \vec L(\hat\Theta, \vec\omega)$?

Umrechnung $\Sigma \to \Sigma'$

$$\vec L = \sum_i m_i \left(\vec r_0 + \vec r_i'\right) \times \left(\dot{\vec r}_0 + \dot{\vec r}_i'\right)$$

$$= \underline{\sum_i} m_i \left(\vec r_0 \times \dot{\vec r}_0 + \vec r_0 \times \underline{\dot{\vec r}_i'} + \underline{\vec r_i'} \times \vec r_0 + \vec r_i' \times \dot{\vec r}_i'\right)$$

es gilt $\underline{\sum_i m_i \vec r_i'} = 0$ wenn $\vec r_0 = \vec R$

$$\frac{d}{dt}\Big|_{\Sigma} \ , \ \frac{d}{dt}\Big|_{\Sigma'}$$

$\neq 0$

$$= M \vec R \times \dot{\vec R} + \underbrace{\sum_i m_i \vec r_i' \times \dot{\vec r}_i'}$$

Drehimpuls d. Schwerpunktbewegg.

$$\underbrace{\sum_i m_i \vec r_i' \times \left(\vec\omega \times \vec r_i'\right)}_{\vec L_{rot}}$$

$\vec L_{rot}$ Drehimpuls d. Rotation

$$\vec L_{rot} = \sum_i m_i \overset{A}{\vec r_i'} \times \left(\overset{B}{\vec\omega} \times \overset{C}{\vec r_i'}\right) \stackrel{?}{=} \vec L_{rot}\left(\hat\Theta, \vec\omega\right)$$

$$\vec A \times \left(\vec B \times \vec C\right) = \vec B \left(\vec A \cdot \vec C\right) - \vec C \left(\vec A \cdot \vec B\right)$$

$$\vec{L}_{rot} = \sum_i m_i \left(\vec{\omega}\,(\vec{r}_i{}' \cdot \vec{r}_i{}') - \vec{r}_i{}'\,(\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i{}') \right)$$

$$= \sum_i m_i \left(\sum_m x_m'^2(i) \sum_k \vec{e}_k{}' \omega_k - \sum_k \vec{e}_k{}' x_k'(i) \sum_l \omega_l x_l'(i) \right)$$

$$\vec{L}_{rot} = \sum_k \vec{e}_k \sum_i m_i \left(\sum_m x_m'^2(i)\, \omega_k - x_k'(i) \sum_l x_l'(i)\, \omega_l \right)$$

rausziehen

$$= \sum_{k,l} \vec{e}_k \sum_i m_i \left(\sum_m x_m'^2(i)\, \omega_l \delta_{lk} - x_k'(i)\, x_l'(i)\, \omega_l \right)$$

$$\vec{L}_{rot} = \sum_{k,l} \vec{e}_k{}' \,\Theta_{kl}\, \omega_l = \sum_k \underbrace{\sum_l \Theta_{kl}\, \omega_l}_{L_{k,rot}} \vec{e}_k$$

d.h.: $L_{k,rot} = \sum_l \Theta_{kl}\, \omega_l$ definiert Matrixmultiplikation

$$\vec{L}_{rot} = \hat{\Theta}\, \vec{\omega}$$

Darstellg. d. Drehimpulses über die Trägheitsmatrix (analog $\vec{p} = m\vec{v}$)