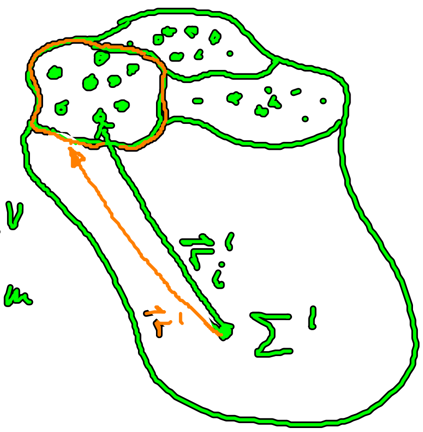
4.1.4. Berechnung von Trägheitstensoren dichter Körper

$\Theta_{k\ell}$ für reale, ausgedehnte Körper (dichtliegende Massepunkte)



$\vec{r}\,'$ „sammelt" alle $\vec{r}_i{}'$ in einer Umgebung $\Delta V(\vec{r}\,')$ mit $\Delta m(\vec{r}\,')$ auf

$\hat{=}$ Grobrasterung d. Raums

(„coarse graining")

Idee: Einführung einer Massendichte $\rho_M(\vec{r}\,') = \dfrac{\Delta m(\vec{r}\,')}{\Delta V(\vec{r}\,')}$.

Übergang von $\vec{r}_i \to \vec{r}\,'$

diskrete zu kontinuierlicher Beschreibung

Gesamtmasse: $$M = \sum_i m_i = \sum_{\vec{r}\,'} \overbrace{\sum_{i(\vec{r}\,')} m_i}^{\text{Masse in Umgebg. } \Delta V \text{ um } \vec{r}\,'} = \sum_{\vec{r}\,'} \Delta m(\vec{r}\,')$$

alle Massepkte d. Körpers

Summe über alle $\vec{r}\,'$

Summe über alle MP „i" in Umgebung v. $\vec{r}\,'$

$$= \sum_{\{\vec{r}\,'\}} \Delta m(\vec{r}\,') \underbrace{\frac{\Delta V(\vec{r}\,')}{\Delta V(\vec{r}\,')}}$$

$$= \sum_{\{\vec{r}\,'\}} \underbrace{\frac{\Delta m(\vec{r}\,')}{\Delta V(\vec{r}\,')}}_{\text{Massendichte am Ort } \vec{r}\,'} \Delta V(\vec{r}\,') \xrightarrow[\Delta V \to 0]{} \int dV' \, \rho_M(\vec{r}\,')$$

$$\rho_M(\vec{r}\,') = \frac{dm(\vec{r}\,')}{dV(\vec{r}\,')}$$

$$M = \int dV' \, \rho_M(\vec{r}\,') \qquad dV' = d^3 r'$$

Def. d. Gesamtmasse über Massedichte.

Regel f. Grobrasterung: $\sum_i m_i f(i) \longrightarrow \int d^3r' \rho_M(\vec{r}\,') f(\vec{r}\,')$

Funktion d. i-ten Massepunkts

Anwendung auf Trägheitstensor:

$$\Theta_{kl} = \sum_i \left(\sum_m x_m'^2(i)\, \delta_{kl} - x_k'(i)\, x_l'(i) \right)$$

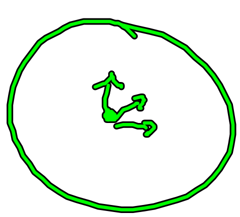
diskret (Massenpunkte)

$$\longrightarrow \int d^3r' \rho_M(\vec{r}\,') \left(\vec{r}\,'^2 \delta_{kl} - x_k' x_l' \right)$$

$$\vec{r}\,' = (x', y', z') = (x_1', x_2', x_3')$$

Beispiel

Vollkugel



Σ' im Schwerpunkt

$\Sigma'_{\parallel}$ ist sofort Hauptachsensystem

und nur durch 1 Zahl

Konstante Massedichte:

$$\rho_M(\vec r\,') = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3} = \frac{\text{Gesamtmasse}}{\text{Volumen}}$$

R: Kugelradius $\longrightarrow$

$\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33}$

$\Theta_{xx} = \Theta_{yy} = \Theta_{zz}$

gleich (Symmetrie)

$$\Theta_{kl} = \int d^3r'\,\rho_M(\vec r\,')\left(\vec r\,'^2\,\delta_{kl} - x_k' x_l'\right)$$

$$\Theta_{zz} = \rho_M\left(\int d^3r'\,r'^2 - \int d^3r'\,z'^2\right)$$

Kugelkoordinaten

$$\int d^3r' \to \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^{R} dr'\,\underline{\underline{r'^2}}$$

damit alles bekannt

$$= \rho_M\left(4\pi\frac{R^5}{5} - 2\pi\int_0^{\pi} d\vartheta' \sin\vartheta' \int_0^R dr'\,r'^4\cos^2\vartheta'\right) \qquad z' = r'\cos\vartheta'$$

r'-Integral $\qquad$ φ-Integral

$\boxed{\cos\vartheta = x \quad \text{Substitution}}$

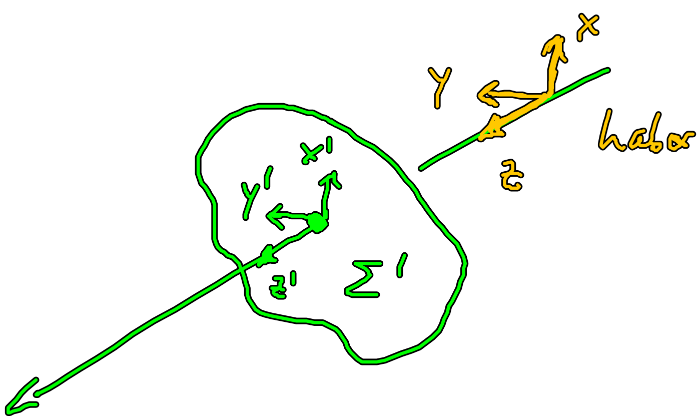
$$= \rho_M\left(4\pi\frac{R^5}{5} - 2\pi\frac{R^5}{5}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}\right)$$

$$= \rho_M\left(\frac{12\pi}{15} - \frac{4\pi}{15}\right)R^5$$

$$= \rho_M\,\frac{8\pi}{15}R^5 = \frac{2}{5}MR^2$$

4.1.5 Rotation um feststehende Achse

bisher $\vec{\omega}(t)$ beliebig, jetzt $\vec{\omega}$ festlegen



Frage: Vereinfacht sich T_{kin}, $\vec{L}$?

$\vec{\omega}$ fest Raum $\hat{=}$ Drehg. - feste Achse

Sinnvolle Def. v. T, $\vec{L}$ über Θ_{kl} war wenn $\underline{\sum_i m_i \cdot \vec{r}_i{}'} = 0$

gilt wenn: a) Σ' im Schwerpunkt

b) wenn keine Translation $\dot{\vec{r}}_0 = 0$

$\Downarrow$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{kl} \Theta_{kl}\, \omega_k\, \omega_l \;\Big|_{\omega_k = \delta_{kz}\omega_{z'}} = \frac{1}{2} \sum_{kl} \Theta_{kl}\, \delta_{kz}\omega_z\, \delta_{lz}\omega_z = \frac{1}{2}\Theta_{zz}\,\omega_z^2$$

$$L_k = \sum_l \Theta_{kl}\, \omega_l = \sum_l \Theta_{kl}\, \delta_{lz}\, \omega_z = \underline{\Theta_{kz}}\, \omega_z$$

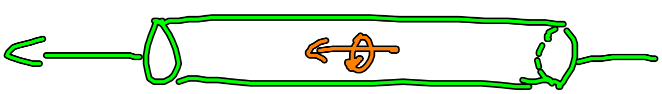
$T = \frac{1}{2}\Theta_{zz}\,\omega_z^2$: Kinetische E. f. feste Achse

Θ_{zz} reicht aus f. Kinetische Energie

$L_k = \Theta_{kz}\,\omega_z$: i.a. $\vec{L} \nparallel \vec{\omega}$

3 Θ sind nötig $(\Theta_{xz}, \Theta_{yz}, \Theta_{zz})$ um Drehimpuls zu beschreiben

noch ein Bsp. f. Θ_{zz} um feste Achse : Zylinder



Konstante Masse

z $\rightarrow$ ω_z $\leftarrow$ Länge L , Radius R

$$T = \frac{1}{2}\Theta_{zz}\,\omega_z^2$$

ausrechnen vorgegeben

$$\Theta_{zz} = \int d^3r'\,\rho_K(\vec{r}\,')\,(\underbrace{x'^2 + y'^2}_{\rho'^2})$$

Zylinderkoordinaten

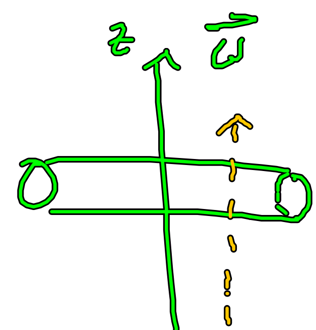
abgelesen aus Trägheitstensormatrix

L 2π R

$$= \rho_M \underbrace{\int_0 dz' \int_0 d\varphi' \int_0 d\rho'\, \rho'\, \rho'^2}_{\text{Zylinderkoordinaten}} \quad , \text{ mit } \rho_M = \frac{M}{\pi R^2 L}$$

$$= \underbrace{\frac{M}{\pi R^2 L}}_{\rho_M} L\, 2\pi \left.\frac{\rho'^4}{4}\right|_0^R = \frac{M}{2} R^2$$

ohne Rechnung: Θ_{zz}, wenn $\vec{\omega}$:



$$\Theta_{zz} = \frac{MR^2}{4} + \frac{ML^2}{12}$$

was macht man bei „ungünstiger Lage"? (wenn die Rechnung lang wird)

Antwort

Satz v. Steiner:

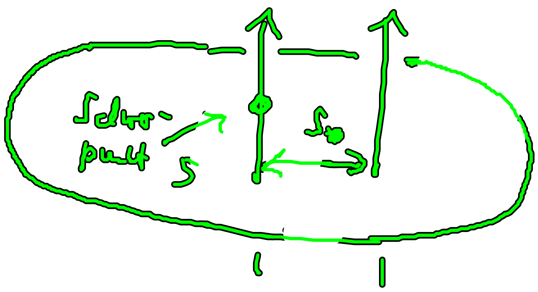
Für Trägheitsmomente zweier, parallel zueinander liegender Achsen von denen eine durch den Schwerpunkt geht gilt:

$$\Theta'' = \Theta'_S + M s_0^2$$

Trägheitsmoment um Achse die // verschoben zu Schwerpunktachse liegt

TM f. Achse d. Schwerpunkt

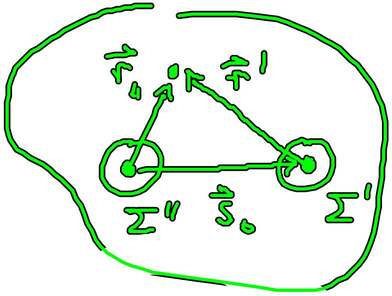
⊥ Abstand zwischen d. Achsen



Eines ausrechnen → <u>andere gibt's frei</u> !

<u>Beweis</u> :

$$\Theta''_{zz} = \sum_i m_i \left(x''^2(i) + y''^2(i) \right)$$ um // - Achse zu Schwerpunktachse



Σ' : ist das Schwerpunktsystem

z- Achse aus Tafelebene heraus

$$\vec r'' = \vec r' + \vec s_0 \qquad (\text{Umrechn. v. } \Sigma', \Sigma'')$$

$$\vec s_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\Theta''_{zz} = \sum_i m_i \left[(x'(i) + x_0)^2 + (y'(i) + y_0)^2 \right]$$

$$\Theta''_{zz} = \sum_i m_i \left[\left(x'^2(i) + y'^2(i) \right) + \left(x_0^2 + y_0^2 \right) \right]$$

+ Mischterm $\underbrace{\sum_i m_i \, x'(i) \, x_0}_{=0 \text{ da Schwerpktsystem } \Sigma'}$ z.B.

$$\Longrightarrow \Theta''_{zz} = \Theta'_S + s_0^2 M \quad \checkmark$$

$\perp$ Abstand

4.2. Dynamik starrer Körper

Keine Translation, d.h. fester Schwerpunkt (Massenpunktmodell)

man nennt einen rotierenden, starren Körper „Kreisel“.

Klassifizierung v. Kreiseln:

a) Form: symmetrischer Kreisel $\Theta_{11} = \Theta_{22}$ (2 TM sind gleich)

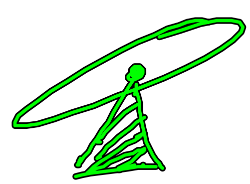
Kugelkreisel $\Theta_{11} = \Theta_{22} = \Theta_{33}$ (3 TM sind gleich)

Würfel auch!

b) Krafteinfluss: ohne äußere Kraft: „freier Kreisel“

mit Schwerkraft: „schwerer Kreisel“

Ein freier Kreisel kann man herstellen indem man den Schwerpunkt unterstützt:



Lager i. Schwerpunkt

Grundgleichungen: Ziel: $\vec{\omega}(t)$ zu berechnen

bzw. zugehörige Drehwinkel (3)

typische Eulersche Winkel, gemessen im Laborsystem

Laborsystem $\dot{\vec{L}} = \vec{M}$

gesucht und von außen

Zusammenhang

mit $\vec{\omega}(t)$

<u>körperfestes System</u>

$$\dot{\vec{L}}' + \underline{\underline{\vec{\omega}' \times \vec{L}'}} = \vec{M}'$$

im rotierenden System, siehe Kapitel Scheinkräfte

$\vec{L}' = \vec{L}'(\underline{\underline{\vec{\omega}'}})$

gesucht

<u>Idee:</u> alles in Σ' lösen, Vorteil: Hauptachsensystem!

dann nach Σ zurücktransformieren

was ist $\vec{M}$ für den schweren Kreisel:

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i$$ Drehmoment als $\sum_i$ einzelner Momente

wichtigster Fall Schwerkraft $\vec{f}_i = m_i \vec{g}$ in Erdnähe

$\vec{g}$: Fallbeschleunigung

$$\vec{M}' = \sum_i m_i (\vec{r}_0 + \vec{r}_i{}') \times \vec{g}$$

$\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = 0$ im Σ'

$$\vec{M}' = \sum_i m_i \vec{r}_0 \times \vec{g} = M \vec{r}_0 \times \vec{g}$$

Konstant in

Bewegungsgl.