4.2.1. Eulergleichungen

Suchen $\vec{\omega}(t)$ bei freier Bewgg. und unter Einwirkung von Drehmomenten

1.) Berechnung von $\vec{\omega}(t)$ im körperfesten Koordinatensystem Σ'_H (Vorteil der Hauptachsen)

$$\vec{\omega}'(t) = (p, q, r) \quad , \quad \hat{\Theta} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}'(t) = (Ap, Bq, Cr) \quad , \quad p = p(t), \; q = q(t), \; r = r(t)$$

2.) Rückrechnung zum Beobachter Σ

in Σ werden 3 Winkel als Koordinaten verwendet

(Eulerwinkel $\vartheta, \varphi, \psi \rightarrow$ Def. gleich)

---

in Σ' gilt: $\underbrace{\dot{\vec{L}}' + \vec{\omega}' \times \vec{L}' = \vec{M}'}_{}$ ← vorgeben

Gleichung für $\vec{\omega}'$, denn $\vec{L}' = (Ap, Bq, Cr)$

Komponentenweise aufschreiben, $\vec{\omega}\,' \times \vec{L}\,' = \begin{vmatrix} \vec{e}_x\,' & \vec{e}_y\,' & \vec{e}_z\,' \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{vmatrix}$

x Komponente

x' Kompont: $A\dot{p} + qr\,(C-B) = M_x'$

y' Kompont: $B\dot{q} + pr\,(A-C) = M_y'$

z' Kompont: $C\dot{r} + pq\,(B-A) = M_z'$

Eulergleichungen f. $\vec{\omega}\,'$, d.h. Komponenten p, q, r (t)

bei vorgegebenem Drehmoment, Trägheitsmomenten

Bemerkungen:

a) Eulergleichungen sind nichtlinear $\rightarrow$ u.U. Probleme

b) gelten im Hauptachsensystem Σ_H'

c) wenn $\vec{\omega}\,'$ bekannt muß in $\vec{\omega}$ (Σ) umgerechnet werden

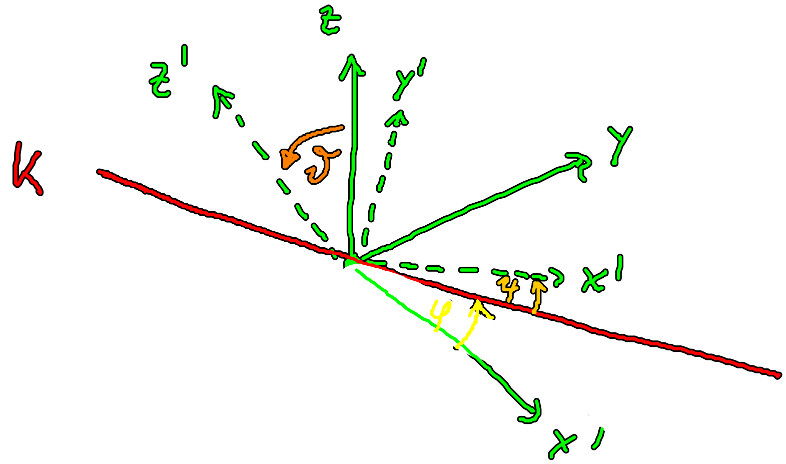
d) in Σ wird die Eulerwinkel als Koordinaten verwendet

Ziel: Eulerwinkel ϑ, φ, ψ (zeitabhängig)

als Funktion von p, q, r auszudrücken

und damit $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ zu bestimmen

geometrische Festlegung: $\Sigma(x, y, z)$ $\quad \Sigma_H'(x', y', z')$



Knotenlinie K

Schnittlinie zwischen der (x,y) und der (x',y') Ebene

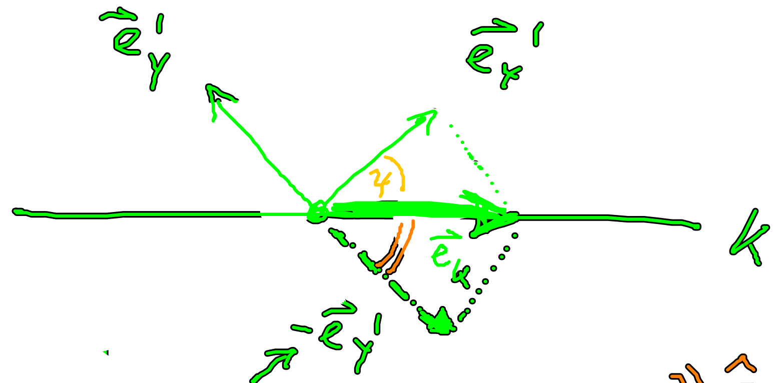
ϑ : ∢ zwischen (z,z')

ψ : ∢ zwischen (K,x')

φ : ∢ zwischen (K,x)

Einheitsvektor in Richtg. d. Knotenlinie $\vec{e}_K$

aufgespannt in x',y'-Ebene durch $\vec{e}_x{}'$, $\vec{e}_y{}'$



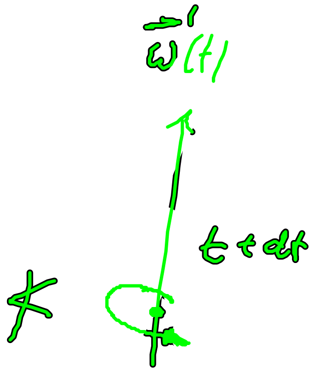
$)) \hat{=} \frac{\pi}{2} - \psi$

$$\vec{e}_K \sim \vec{e}_x{}' \cos\psi - \vec{e}_y{}' \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)}_{\sin\psi}$$

Norm von rechter Seite $= 1$

$$\rightarrow \quad \vec{e}_K = \vec{e}_x{}' \cos\psi - \vec{e}_{y'} \sin\psi$$

Einheitsvektor in Richtg. der Knotenlinie



$K \hat{=}$ Winkeländg. $\perp$ zu $\vec{\omega}'$

die Winkeländg. von K wird in die drei Anteile der Eulerwinkel aufgespalten:

ϑ Winkel ändert sich $\perp K$

in ϑ Richtg: $$\vec{\omega}'\Big|_{\vartheta} = \frac{dK}{dt}\Big|_{\vartheta} = \dot{\vartheta}\,\vec{e}_K$$

$\varphi, \psi =$ fest

$$\vec{\omega}'\Big|_{\vartheta} = \dot{\vartheta}\left(\vec{e}_{x'}\cos\psi - \vec{e}_{y'}\sin\psi\right)$$

in φ, ψ − Richtg bestimmen, dann alle addieren

$$\vec{\omega}'\Big|_{\varphi} = \dot{\varphi}\left(\sin\vartheta\sin\psi\,\vec{e}_x{}' + \sin\vartheta\cos\psi\,\vec{e}_y{}' + \cos\vartheta\,\vec{e}_z{}'\right)$$

$$\vec{\omega}'\Big|_{\psi} = \dot{\psi}\,\vec{e}_z{}'$$

$\vec{\omega}'$ ist die Summe aus $\vec{\omega}'|_{\vartheta} + \vec{\omega}'|_{\varphi} + \vec{\omega}'|_{\psi} = \vec{\omega}'$

dies sortieren nach $\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}$:

$$\omega'_x = p = \dot{\vartheta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi$$

$$\omega'_y = q = -\dot{\vartheta}\sin\psi + \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi$$

$$\omega'_z = r = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta$$

in Σ' bestimmt

Diff'tialgleichungssystem für $\vartheta, \varphi, \psi(t)$.

durch Lösen ist die Bewegg. in Σ bekannt

4.2.2. Anwendungen der Eulergleichungen

4.2.2.1. stationäre Lösung f. freien Kreisel

stationär: gibt es eine Lösung bei der $\vec{\omega}$ fest im Raum steht?

frei: $\vec{M} = 0$

Eulergleichungen: $\underbrace{\dot p = 0,\ \dot q = 0,\ \dot r = 0}_{\vec\omega\,' = \text{konst} = \vec\omega}$; $M_i = 0$

$\downarrow$

$$0 = (C-B)\, q_0 r_0$$ stationäre Lösungen, Index „0"
$$0 = (A-C)\, p_0 r_0$$
$$0 = (B-A)\, p_0 q_0$$

diese Gleichungen erfordern daß mindestens 2 der 3 Variablen Null sind

z.B $q_0 = 0 = r_0 \longrightarrow \underbrace{p_0 \neq 0}_{\text{nicht triviale Lösg.}}$

Eine freie Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec\omega$ kann nur um eine Hauptachse erfolgen.

Die Rotation eines starren Körpers um eine Hauptachse erkennt man am „Nichttorkeln".

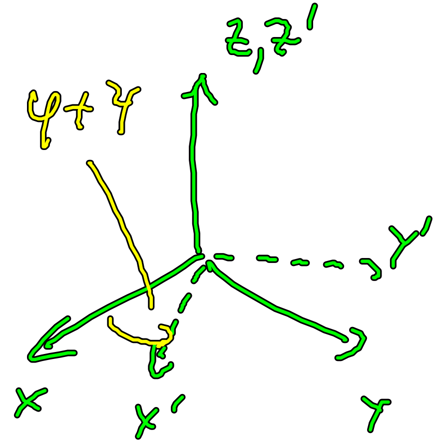
<u>Achtg</u>: es sind nur 2 Achsen stabil bei der Bewegg.

$$A < B < C$$

$$\vec\omega$$

Stabile Achse

eigentlich zurückrechnen in Σ ;



Euler χ : $\vartheta = 0$

$\rightarrow \dot{\vartheta} = 0$

einsetzen in $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\varphi + \psi = r_0\, t}$

4.2.2.2. Stabilitätsanalyse v. Fixpunkten / Anwendung auf Eulergleichg.

etwas allgemeiner: f. nichtlineare Dgl.-system analyse

Dgl-system $\dot{x}_i(t) = f_i\left(x_k(t), \mu_k, t\right)$

Variable $i = 1 \dots n$

Parameter

Analyse der Fixpunkte ($\dot{x}_i = 0$)

<u>autonomes Dgl system</u> hängen nicht v. Zeit in f_i ab :

$$f_i\left(x_k(t), \mu_k\right)$$

kein Einschränkg. $x_{n+1} = t$

$\dot{x}_{n+1} = 1$ mitnehmen

→ Beschränkg auf autonome Systeme mgl. OBdA

<u>Vektorschreibweise:</u> $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(\vec{x}, \vec{\mu})$

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3 \cdots)$

$\vec{f} = (f_1, f_2, f_3 \cdots)$

Fixpunkt

Fixpunkt ist definiert $\dot{\vec{x}} = 0 \longrightarrow \vec{f}(x_i^0, \mu_k) = 0$

Eulergleichungen $x_i^0 \longrightarrow$ $q = 0 = r$ für $p = p_0 \neq 0$

$p = 0 = r$ für $q = q_0 \neq 0$

$p = 0 = q$ für $r = r_0 \neq 0$

Wie kommt man an Stabilität?

<u>Idee:</u> Ansatz $\vec{x}(t) = \vec{x}^0 + \underbrace{\delta\vec{x}(t)}_{\text{wie verhält sich}}$

Fixpkt.

diese Änderung?

bleibt klein → **stabil**

wird groß → **instabil**

Einsetzen:

v. klein

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{x}^{\,0} + \delta\vec{x}\right) = f\left(\vec{x}^{\,0} + \delta\vec{x}\right)$$

$$\dot{\delta\vec{x}} = \underbrace{\vec{f}\left(\vec{x}^{\,0}\right)}_{=0\text{, denn Fixpunkt}} + \underbrace{\delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}}\, f(\vec{x})\Big|_{\vec{x}=\vec{x}^{\,0}}}_{1.\text{ Ordnung Taylorreihe}} + \underbrace{\dots}_{\text{Korrekturen}}$$

Komponenten: $$\dot{\delta x}_j = \sum_i \delta x_i\, \partial_{x_i} f_j = \sum_i \underbrace{\left(\partial_{x_i} f_j\right)}_{\text{Matrix } A_{ji}} \delta x_i$$

$$= \sum_i A_{ji}\, \delta x_i$$

zu lösen: $$\dot{\delta\vec{x}} = \hat{A}\, \delta\vec{x}$$ Matrixgl. f. $\delta\vec{x}$

Jacobimatrix.

man entwickelt nach den Eigenvektoren der Matrix die Störung

Eigenwertproblem: $\hat{A}\,\vec{u}_n = \lambda_n \vec{u}_n$

Eigenvektor — Eigenwerte

Schauen uns an Störung in Richtg. der Eigenvektoren

$$\delta\vec{x}_n = \vec{u}_n\, g_n(t)$$

Jede beliebige Störg. wird als Summe der Eigenvektoren aufgespannt.

$\delta\vec{x}_n$ einsetzen in Bewegungsgl. $\dot{\delta\vec{x}} = \hat{A}\,\delta\vec{x}$

$$\underline{\underline{\dot{g}_n(t)}}\,\vec{u}_n = \hat{A}\, g_n(t)\,\vec{u}_n = g_n(t)\,\hat{A}\,\vec{u}_n = \underline{\underline{g_n(t)\,\lambda_n}}\,\vec{u}_n$$

$$g_n(t) = e^{\lambda_n t} g_0$$

Die Eigenwerte λ_n der Jacobimatrix bestimmen die Stabilität der Fixpunkte x_i^0, denn $\underbrace{\delta\vec{x}_n}_{\text{Störg.}} = e^{\lambda_n t} g_0\, \vec{u}_n$.

$\lambda_n < 0$ } Störung $\delta\vec{x}_n$ klingen mit Zeit ab

Lsg. bewegt sich auf Fixpunkt zu

$\hat{=}$ anziehender / stabiler Fixpunkt

$\lambda_n > 0$ $\Downarrow$ Störungen $\delta \vec{x}_n$ bauen sich auf

Lsg. entfernt sich von Fixpunkt

$\hat{=}$ abstoßender / instabiler Fixpunkt

$\lambda_n \in \mathbb{C}$ komplex $\Downarrow$ beschreibt oszillierende Bewegg.

die stabil oder instabil ist