Interpretation

Zustand mit N-Anregungen (Quanten) in Moden eines Felds:

$$|\psi_N\rangle = \sum_{n_1, n_2 \cdots} C_{n_1 n_2 \cdots} \underbrace{|n_1, n_2 \cdots\rangle}_{|n_1\rangle|n_2\rangle \cdots |n_\lambda\rangle \cdots} \quad \text{aus EF von } H_0^{(1)} = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda$$

$$|n_\lambda\rangle = \frac{(a^\dagger)^{n_\lambda}}{(n_\lambda !)^{1/2}} |0_\lambda\rangle \quad (\text{Vakuum d. } \lambda\text{-Oszillators})$$

→ N Feldquanten in Mode λ zu $N = \sum_\lambda n_\lambda$ verteilt

quantisierte Felds + Teilchen sind in dieser Sprechweise nicht zu unterscheiden. (war unser Ziel)

$$a_\lambda^\dagger \, |n_1 \cdots n_\lambda \cdots\rangle = \begin{Bmatrix} \sqrt{n_\lambda + 1} \\ (-1)^m \sqrt{1 - n_\lambda} \end{Bmatrix} |n_1 \cdots \begin{Bmatrix} n_\lambda + 1 \\ 1 - n_\lambda \end{Bmatrix} \cdots\rangle \quad \begin{matrix} \text{Boson} \\ \text{Fermion} \end{matrix}$$

$$m = \sum_{i=1}^{\lambda-1} n_i$$

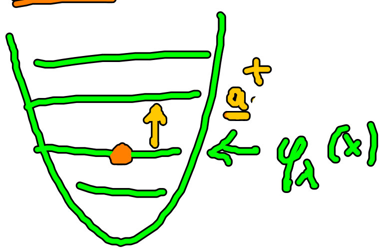
$$a_\lambda \, |n_1 \cdots n_\lambda \cdots\rangle = \begin{Bmatrix} \sqrt{n_\lambda} \\ (-1)^m \sqrt{n_\lambda} \end{Bmatrix} |n_1 \cdots \begin{Bmatrix} n_\lambda - 1 \\ 1 - n_\lambda \end{Bmatrix} \cdots\rangle \quad \begin{matrix} \text{Boson} \\ \text{Fermion} \end{matrix}$$

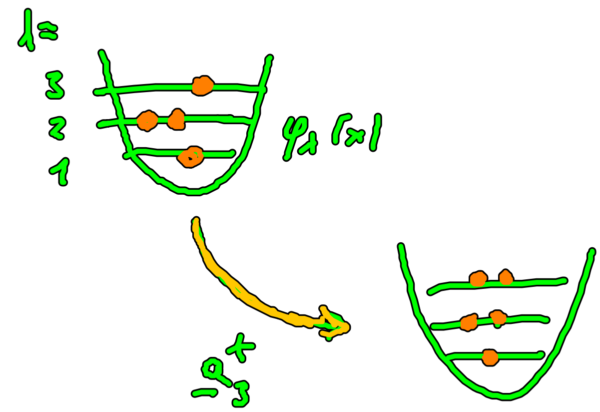
Erzeuger / Vernichter – Interpretation

QM I

$\psi(x) = \sum_\lambda c_\lambda(t)\, \varphi_\lambda(x) \longrightarrow \underline{\psi} = \sum_\lambda \underline{a}_\lambda(t)\, \varphi_\lambda(x)$

QFT





$a, a^+ \; (x, p_x)$

1 Teilchen QM

Vielteilchen QM

- Jedes Schrödingerteilchen kann als Anregung von Moden eines Quantenfeldes verstanden werden.

- Teilchen + Felder der klassischen Physik sind einheitlich im Teilchenzahlformalismus $\{n_\lambda\}$ beschrieben.

- Jede QFT ist sofort eine Vielteilchentheorie

  bisher: noch keine WW zwischen Teilchen

- Interpretation d. Heisenberg operators:

$$|\Psi_N\rangle = \sum_{\{n_\lambda\}} C(\{n_\lambda\}) \prod_\lambda \frac{(a_\lambda^+)^{n_\lambda}}{\sqrt{n_\lambda!}} |0_\lambda\rangle$$

$$\Psi^+(\vec{r},t) = \sum_\lambda \varphi_\lambda^*(\vec{r})\, a_\lambda^+(t) \qquad \varphi_\mu(\vec{r}),\ \int d^3r$$

invers: $\quad a_\lambda^+(t) = \int d^3r\, \varphi_\lambda(\vec{r})\, \Psi^+(\vec{r},t)$

einfach in $|\Psi_N\rangle$: $\quad n_\lambda = 1$ f. 1 Quant pro Mode

$$|\Psi_N\rangle = \sum_{\{n_\lambda\}} C(\{n_\lambda\}) \prod_\lambda \int d^3r\, \varphi_\lambda(r)\, \underbrace{\Psi^+(r,t)\ |0\rangle}$$

$\Psi^+(r,t)$ erzeugt ein Teilchen am Ort $\vec{r}$, zur Zeit t

mit der Amplitude $\varphi_\lambda(\vec{r})$.

5 Vielteilchenzustände d. Schrödingerfeldes

5.1. Einteilchenzustand

identisch f. Bosonen u. Fermionen

$$|0, 0, \underset{\lambda_1}{1}, 0\rangle = a^+_{\lambda_1}|0\rangle \qquad |0\rangle = \prod_\lambda |0_\lambda\rangle$$

(a) normiert:

$$\langle 0|a_\lambda a^+_\lambda|0\rangle \overset{!}{=} 1$$

$$\langle 0|1 \pm \underbrace{a^+_\lambda a_\lambda|0\rangle}_{0} = \langle 0|1|0\rangle = \underline{\underline{1}}$$

(b) Ortsraum $\qquad \langle \vec{r}|n\rangle = \varphi_n(\vec{r}) \quad$ (QMI)

$$\langle \vec{r}_1|0 \cdots 1 \cdots\rangle = \langle 0|\Psi(\vec{r}_1, t)\, a^+_{\lambda_1}|0\rangle =$$

Koordinate des einen Teilchens

$$\langle 0|\sum_{\lambda'} \varphi_{\lambda'}(\vec{r}_1)\underbrace{a_{\lambda'}\, a^+_{\lambda_1}}_{\delta_{\lambda_1\lambda'} \pm a^+_{\lambda_1} a_{\lambda'}}|0\rangle = \underline{\underline{\varphi_{\lambda_1}(\vec{r}_1)}}$$

$= 0$

Wellenfkt. an H_0

wenn Ort + Spin (QMI)

$$\varphi_{\lambda_1}(\vec{r}_1) \to \vec{\chi}_{m_{s_1}}(\vec{s}_1)\,\varphi_{n_1}(\vec{r}_1)$$

$\lambda \to m_s, n \leftarrow$ Orts QZ: H-Atom QZ

Spin f. El. $\pm\frac{1}{2}$

5.2. Zweiteilchen Zustand f. Fermionen

$$a^\dagger_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_2} |0\rangle = |\cdots \underset{\lambda_1}{1} \cdots \underset{\lambda_2}{1}, 0\rangle$$

<u>Versuch:</u> $a^\dagger_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_1} |0\rangle = - a^\dagger_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_1} |0\rangle \to \equiv 0$

$$[a^\dagger_{\lambda_1}, a^\dagger_{\lambda_2}]_+ = 0$$

$$\hookrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \to a^\dagger_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_1} = - a^\dagger_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_1}$$

$\longrightarrow$ 2 Fermionen können nicht in denselben Zustand sein (Pauliprinzip) $\lambda \to (m_s, n)$

(a) Normierung

$$\langle 0| a_{\lambda_2} a_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_1} a^\dagger_{\lambda_2} |0\rangle \overset{!}{=} 1$$

$$= \langle 0| a_{\lambda_2} (1 - a^\dagger_{\lambda_1} a_{\lambda_1}) a^\dagger_{\lambda_2} |0\rangle$$

$$= \langle 0| \left((1 - a^\dagger_{\lambda_2} a_{\lambda_2}) - a_{\lambda_2} a^\dagger_{\lambda_1} (\delta_{\lambda_1 \lambda_2} - a^\dagger_{\lambda_2} \underbrace{a_{\lambda_1}) |0\rangle}_{\equiv 0} \right.$$

$$= \langle 0 | 1 - \delta_{\lambda_1\lambda_2} (\delta_{\lambda_1\lambda_2} - a^+_{\lambda_1} a_{\lambda_2}) | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | (1 - \delta_{\lambda_1\lambda_2}) | 0 \rangle = 1 \text{ wenn } \underline{\underline{\lambda_1 \neq \lambda_2}}$$

(muß in 2 unterschiedlichen QZ. sein)

b) Ortsdarstellg.

$$|\vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} \underline{\psi}^+(\vec{r}_1) \underline{\psi}^+(\vec{r}_2) |0\rangle$$

$$|\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \psi^+(\vec{r}_1) \dots \psi^+(\vec{r}_N) |0\rangle$$

allg. N-Teilchenzustand in Ket-Schreibweise

$$| \dots 1, \dots 1, \dots \rangle = a^+_{\lambda_1} a^+_{\lambda_2} |0\rangle$$

$$\underbrace{\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)}_{\substack{\text{2 Teilchenzustand} \\ \text{in Schrödingerwellenfkt.-} \\ \text{darstellung}}} = \langle \vec{r}_1, \vec{r}_2 | a^+_{\lambda_1} a^+_{\lambda_2} |0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | \psi(\vec{r}_2) \psi(\vec{r}_1) a^+_{\lambda_1} a^+_{\lambda_2} |0\rangle$$

ÜA

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\underbrace{\varphi_{\lambda_1}(\vec r_1)\, \varphi_{\lambda_2}(\vec r_2)}_{\text{Produkt der Lösungen der jeweiligen Teilchen}} - \underbrace{\varphi_{\lambda_1}(\vec r_2)\, \varphi_{\lambda_2}(\vec r_1)}_{\text{garantiert Ununterscheidbarkeit}} \Big)$$

$$\phi(\vec r_1, \vec r_2) = -\phi(\vec r_2, \vec r_1)$$

$$|\phi(\vec r_1, \vec r_2)|^2 = |\phi(\vec r_2, \vec r_1)|^2 \text{ ist}$$

Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte die invariant gegen $\vec r_1 \leftrightarrow \vec r_2$ sein muß

$\longrightarrow$ fermionische Wellenfunktion sind antisymmetrisch gegen Koordinatentausch

$$\phi(\vec r_1, \vec r_2) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \begin{vmatrix} \varphi_{\lambda_1}(\vec r_1) & \varphi_{\lambda_1}(\vec r_2) \\ \varphi_{\lambda_2}(\vec r_1) & \varphi_{\lambda_2}(\vec r_2) \end{vmatrix} \hat{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Spin + Ort gemeinsam

$\lambda_i \to (n_i\,,\; m_{s_i})$ $\qquad m_s \equiv s = \pm\frac{1}{2}$

Ort $\qquad$ Spin

$$\phi(\vec r_1, \vec s_1;\, \vec r_2, \vec s_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\varphi_{u_1}(\vec r_1)\vec\chi_{s_1}(\vec s_1)\,\varphi_{u_2}(\vec r_2)\vec\chi_{s_2}(\vec s_2)$$
$$- \varphi_{u_2}(\vec r_1)\vec\chi_{s_2}(\vec s_1)\,\varphi_{u_1}(\vec r_2)\chi_{s_1}(\vec s_2)\Big)$$

allgemeiner 2 Teilchenzustand

<u>Spezialfälle</u>: $\underbrace{u_1 = u_2 = u}$:

$$\phi \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\varphi_u(\vec r_1)\varphi_u(\vec r_2)}_{\text{symm. Ort}}\underbrace{\Big(\vec\chi_{s_1}(\vec s_1)\vec\chi_{s_2}(\vec s_2) - \chi_{s_2}(\vec s_1)\chi_{s_1}(\vec s_2)\Big)}_{\text{antisymm. Spin}}$$

$s_1 = s_2 = s = m_s$

$$\phi \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\underbrace{\Big(\varphi_{u_1}(\vec r_1)\varphi_{u_2}(\vec r_2) - \varphi_{u_2}(\vec r_1)\varphi_{u_1}(\vec r_2)\Big)}_{\text{antisymm. Ort}}\underbrace{\vec\chi_s(\vec s_1)\vec\chi_s(\vec s_2)}_{\text{symm. Spin}}$$

m_s

<u>Beispiel</u>: die obere WF tritt bei He-Atom auf

2 Elektronen im Grundzustand:

$2\times\ \varepsilon_{1s} \longrightarrow$ Zustand $\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_{1s}(\vec r_1)\,\varphi_{1s}(\vec r_2)\left[\chi_{\uparrow}(s_1)\,\chi_{\downarrow}(s_2)-\chi_{\uparrow}(s_2)\,\chi_{\downarrow}(s_1)\right]}}$

$\uparrow\downarrow$ 1s

c) Zwei Spins: Addition + Zustände

<u>Zustände</u>:

1.	$\uparrow$	$\uparrow$
2.	$\uparrow$	$\downarrow$
3.	$\downarrow$	$\uparrow$
4.	$\downarrow$	$\downarrow$

diese Zustände würden Basis in diesem Raum bilden

jeder Basisvektor kann als Lin.komb. von $|i\rangle_1$, $|i\rangle_2$

$i = \uparrow, \downarrow$

$$\underbrace{|\psi\rangle}_{\text{Basis}} = \sum_{ij} a_{ij}\cdot |i\rangle_1\, |j\rangle_2$$

Zustände können auch Gesamtspin $\underline{\vec S} = \underline{\vec S_1} + \underline{\vec S_2}$ (Spinoperator)

Vektor die Paulimatrix enthalten

und Spinprojektion klassifiziert werden: $\underline{S}_z = \underline{S}_{z1} + \underline{S}_{z2}$

$$|\varphi\rangle = |S, M_S\rangle$$

$$\vec{\underline{S}}^2 |S, M_S\rangle = \hbar^2 S(S+1) |S, M_S\rangle$$

$$\underline{S}_z |S, M_S\rangle = \hbar M_S |S, M_S\rangle$$

$$\{S\} = 0, 1 \qquad \{M_S\} = 0, \pm 1$$