5.4. Zwei- und N-Teilchenzustand f. Bosonen

(ohne direkte Beweise)

Bosonen: $\left[a_{\lambda_1}, a^+_{\lambda_2} \right]_- = \delta_{\lambda_1 \lambda_2}$

Zweiteilchenzustand: $a^+_{\lambda_1} a^+_{\lambda_2} |0\rangle$

a) Ortsraum, kein Spin

$$\phi_B(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_{\lambda_1}(\vec{r}_1)\, \varphi_{\lambda_2}(\vec{r}_2) + \varphi_{\lambda_2}(\vec{r}_1)\, \varphi_{\lambda_1}(\vec{r}_2) \right)$$

Bosonen können sich im selben Zustand und am demselben „Ort" aufhalten. ($\phi_B(\vec{r}_1, \vec{r}_2 = \vec{r}_1) \neq 0$)

b) Verallgemeinerung auf N-Teilchen mit Spin $\vec{x}_i = (\vec{r}_i, \vec{s}_i)$

$$\phi_B(\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \frac{1}{\sqrt{\prod_i^K N_i!}} \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Permutationen } P \\ \text{von } (\vec{x}_i)}} P \left(\varphi_{\lambda_1}(\vec{x}_1)\, \varphi_{\lambda_2}(\vec{x}_2) \cdots \varphi_{\lambda_N}(\vec{x}_N) \right)$$

N-Teilchen

sind in ϕ_B $K < N$ verschiedene Orbitale besetzt so ist N_i die Teilchenzahl im i-ten Orbital

5.3. Interpretation

$\phi(\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_N)$ sei Vielteilchenwellenfunktion

$\rightsquigarrow$ $|\phi(\vec{x}_1 \cdots x_N)|^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte

Teilchen bei $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ usw. zu finden

Teilchen in Mikrowelt können nicht unterschieden werden,
weil Wellenfunktion überlappen

$\longrightarrow$ man darf keinen Unterschied finden,
wenn $\vec{x}_1 \leftrightarrow \vec{x}_2$ Vertauschung.
($\vec{x}_i \leftrightarrow \vec{x}_j$ i.a.)

$$|\phi(\vec{x}_1, \cdots \vec{x}_i, \vec{x}_j \cdots \vec{x}_N)|^2 = |\phi(\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_j, \vec{x}_i \cdots \vec{x}_N|^2$$

$$\rightsquigarrow \quad \phi(\cdots \vec{x}_i, \vec{x}_j \cdots) = \pm\, \phi(\cdots \vec{x}_j, \vec{x}_i \cdots)$$

$\rightsquigarrow$ es muß in Natur 2 Arten v. Teilchen geben

„+" Bosonen : symmetrische WF gegen Teilchentausch

„−" Fermionen : antisymm. WF gegen Teilchentausch

W. Pauli 1926 Spin-Statistik Theorem

halbzahlige Spins $\longrightarrow$ Fermion (Fermistatistik)

ganzzahlige Spins $\rightarrow$ Boson (Bosestatistik)

5.6 Verschränkte Zustände zweier Fermionen

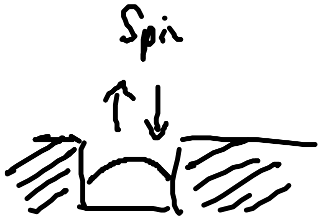
(oder „Wundersame Dinge der QM …")

Motivation: Q-Information

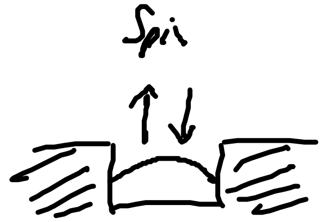
2-Teilchen: $|\Psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} \, |i\rangle_1 \, |j\rangle_2$

1. und 2. Teilchen in Zustand $i,j = \uparrow,\downarrow$

jedes Teilchen (2) hat 2 Zustände



Quantenpunkt 1 (H_1)



Quantenpunkt 2 (H_2) im Festkörper

oder 2 Photonen mit vertikaler + horizontaler

Polarisation $\uparrow$ $\longrightarrow$

Der Gesamtzustand zweier Teilchen heißt verschränkt (entangled) wenn sich der Zustand <u>nicht</u> als einfacher Produktzustand von einer Wellenfunktion aus H_1 und WF aus H_2 schreiben läßt.

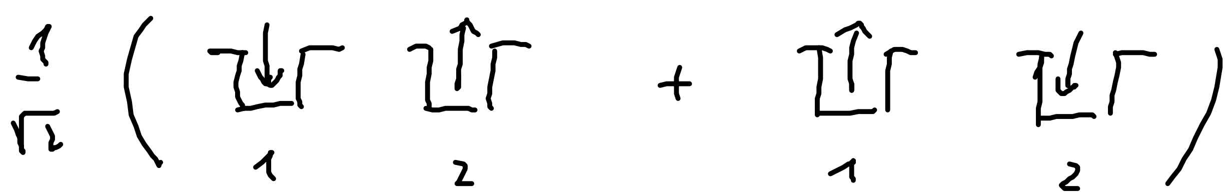
<u>Beispiel</u>: $|1, -1\rangle = |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2$

$\hat{=}$ Produkt aus System 1 und 2

$\rightarrow$ nicht verschränkt

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_1 \right)$$

ein Bsp. f. verschränkten Zustand.



Messung, dann ist mit 50% rechts bzw links-Konfiguration zu erwarten,

$\Longrightarrow$ egal welche man mißt, die Messung an 1 legt sofort den Zustand in 2 fest!

Einstein: EPR-Paradox: „Spukhafte Fernwechselwirkung"

→ QM ist nicht vollständig.

Schrödingers Katze: Illustration

6. Quantisierung d. freien elektromagnetischen Feldes

6.1. Feldquantisierung über Lagrangetechnik

allg. Quantisierung: (a → g) siehe Beginn II

a) Lagrangefunktion: $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r},t) - \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r},t)\right)$

$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$, $\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \nabla \phi$

Felder über Potentiale definiert, im Vakuum $\phi = 0$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

in Coulombeichung, behalten bei wenn Licht-Materie WW

richtige Maxwellgl. über Lagrangegleichungen f. Felder (ÜA)

b) Festlegg. d. Impulse: $\underline{\underline{\Pi_{A_x}}} = \partial_{\dot{A}_x} \mathcal{L} = \varepsilon_0 \dot{A}_x = \underline{\underline{-\varepsilon_0 E_x}}$

$\vec{A}$ - soll quantisiert werden

$\dot{\vec{A}} = \partial_t \vec{A}$

kanonische Variable die quantisiert werden müssen sind $\underline{\underline{\vec{A}}}, \underline{\underline{\vec{E}}}$.

c) $\vec{A}, \vec{E}$ werden zu Operatoren $\underline{\vec{A}}, \underline{\vec{E}}$

d) Vertauschungsrelation:

$$\left[\underline{A}_l(\vec{r},t), \underline{E}_m(\vec{r}\,',t)\right]_- \simeq \frac{i\hbar}{\varepsilon_0}\,\delta_{lm}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$l, m = x, y, z$

diese Vertauschungsrelation ist noch nicht ganz richtig, weil sie die Bedingung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ nicht erfüllt.

Ergebnis vorweg: $\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta_{lm} \rightarrow \underbrace{\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta_{lm} - \frac{1}{4\pi}\partial_l\partial_m\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}_{\delta_T^{lm}(\vec{r}-\vec{r}\,')}$

„transversale Deltafunktion"

Beweis (i) erster Term reicht nicht aus:

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\; e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \propto \vec{\nabla}\cdot\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$\underbrace{\sum_l \partial_{x_l}}_{\text{Divergenzbildung}}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

$$\sum_l \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}\; -ik_l\, e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')} \neq 0$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \neq 0$$

„Ansatz“

Versuch d. Korrektur

$$\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^3}\sum_l \partial_{x_l}}_{\vec{\nabla}\cdot}\left(\int d^3\vec{k}\, e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,')}\left(\delta_{lm} - k_l k_m \underbrace{f(\vec{k})}_{\text{unbekannte Funktion}}\right)\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sim \sum_l \int d^3\vec{k}\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\left(-ik_l\,\delta_{lm} + i\,k_l^2 k_m f(\vec{k})\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\int d^3\vec{k}\; e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}\left(-ik_m + i\,k_m \underbrace{\sum_l k_l^2 f(\vec{k})}_{\stackrel{!}{=}1}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

wenn $\vec{f}(\vec{k}) = \frac{1}{|\vec{k}|^2}$, so ist $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

Rücktrafo: über Fouriertrafo: $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{|\vec{k}|^2} = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}|}$

$$\delta^{lm}_{T}(\vec{r}-\vec{r}') = \delta_{lm}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}') - \frac{1}{4\pi}\,\partial_l \partial_m \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

e) Hamiltondichte und Operator:

$$\mathcal{H} = \dot{\vec{A}} \cdot \vec{E}\,\varepsilon_0 - \mathcal{L}$$

$$H = \int d^3r \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2(\vec{r},t) + \frac{1}{2\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r},t) \right)$$

$$\rightsquigarrow \underline{H} = \int d^3 \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\partial_t \underline{\vec{A}}(\vec{r},t)\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0} \left(\vec{\nabla} \times \underline{\vec{A}}(\vec{r},t)\right)^2 \right)$$

f) Bewegungsgl. f. $\underline{\vec{A}}, \underline{\overline{\Pi}}$

g) Entwicklung nach Moden

reelles Feld

$$\underline{\vec{A}}(\vec{r},t) = \sum_k \vec{u}_k(\vec{r})\, c_k(t) + h.a.$$

Photonoperatoren

$$[c_u , c_{u'}^{+}] = \delta_{uu'}$$

u : sind Quantenzahl die Moden des Strahlungsfelds charakterisiert

$$\vec{A} \sim \vec{A} e^{i\omega t}$$

$$\Box \vec{A} = 0 \longrightarrow \underline{\underline{\Delta \vec{A}}} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{A} = 0 \qquad \vec{A}_\omega(\vec{r}) = \vec{A}$$

Schrödgl. $(\vec{r}, t) \longrightarrow \underline{\underline{H \varphi_u(\vec{r})}} = \varepsilon_u \varphi_u(\vec{r})$

Lösungen f. $\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r}) \qquad \omega = ck$

$$= \left\{ \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\sqrt{V}} \cdot \vec{e}_\lambda(\vec{k}) \right\}$$