

## 7. Bellzustände: Verschränkung und Teleportation

### 7.1. Bellzustände

- spezielle Zweiteilchenzustände, wobei jedes der 2 Teilchen zwei separate Zustände einnehmen kann
- Bsp: Photonen mit 2 Polarisationen  
Elektronen mit 2 Spinzuständen ...

$$\underbrace{|\uparrow\rangle_1, |\downarrow\rangle_1}_{\substack{\text{1. Teilchen mit Photon } \uparrow \text{ vertikal} \\ \text{bzw horizontal } \downarrow \text{ (} \rightarrow \text{) polarisiert}}}, \text{ sowie: } \underbrace{|\uparrow\rangle_2, |\downarrow\rangle_2}_{\text{analog}}$$

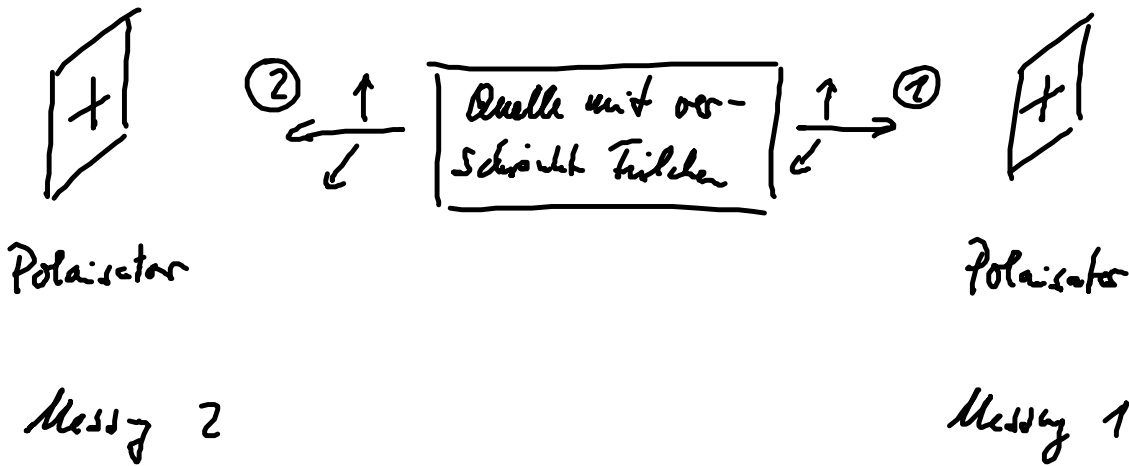
Bellzustände:

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 \pm |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2)$$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \pm |\downarrow\rangle_2 |\uparrow\rangle_1)$$

- sind 4 Zustände, bilden Basis im 2-Teilchenraum
- Symmetrie u.ä. d. orthogonale Silberkette

## 7.2. Nodural EPR - Experiment



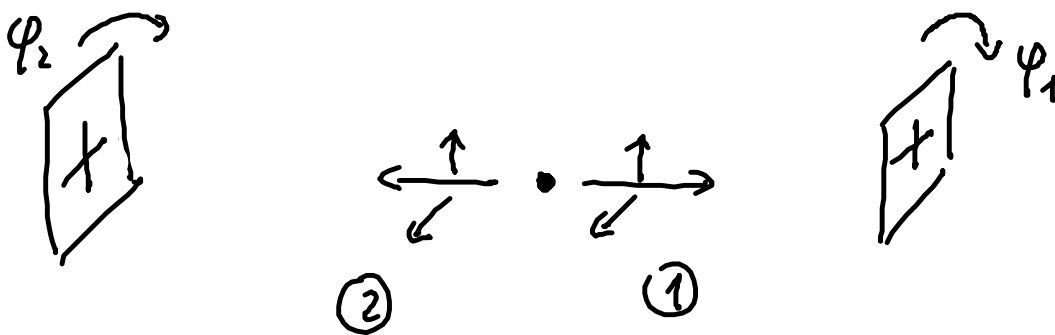
$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 + |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2)$$

- bei Messg. tritt mit je 50% ein der beiden Realitäts. ein  
wenn Messg. an 1 den Zustand  $\uparrow$  ergibt so ist  
Teilchen 2 auf jed. Fall auch in  $\uparrow$ .  $\hat{=}$  "spukhafte Fernwirkung."
- wenn man das nicht glaubt so, die QM ist unvollständig, es  
könnte entweder  $(|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2)$  oder  $(|\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2)$  bereits vorliegen  
beim Aussenden  $\rightarrow$  auch Erklärung. über Mangel  
an klassischer Info beim Start
- um diese Vorschlag zu unterstreifen J. Bell 1964:  
hat Ungleichungen formuliert

(Bell'sche Ungleichungen) unter der Vorausss.,  
 daß wir mit klassischer Erklärung Exp. an  
 beschränkte Objekten erklären können.

→ wenn im Exp. eine Verletzung dieser Ungleichungen  
 auftritt so bleibt uns nur die QM-Erklärung

Vorschlag EPRB:



$\varphi_1, \varphi_2$ : zusätzliche Parameter im Exp.

und dann Vgl. von klass. und QM-Interpretation

f. verschiedene  $\varphi_1, \varphi_2$ . → Entscheidung

Messung erfolgt in unser Basis

dh: Basiswechsel  $\varphi_1, \varphi_2 = 0 \rightarrow \varphi_1 \neq 0 \neq \varphi_2$

$$\begin{pmatrix} |\uparrow\rangle_i \\ |\downarrow\rangle_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\uparrow\rangle'_i \\ |\downarrow\rangle'_i \end{pmatrix}$$

alt  $i = 1, 2$ , Drehwinkel  $\varphi_i$ ,  $|\rangle' \stackrel{!}{=} \text{neues Basis}$

### quantenmechanische Interpretation

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \underline{|\downarrow\rangle_1} \underline{|\downarrow\rangle_2} + \underline{|\uparrow\rangle_1} \underline{|\uparrow\rangle_2} \right)$$

wird ausgedrückt, detektiert in  $|\rangle'$

$$|\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \underline{(\sin\varphi_1 |\uparrow\rangle'_1 + \cos\varphi_1 |\downarrow\rangle'_1)} \underline{(\sin\varphi_2 |\uparrow\rangle'_2 + \cos\varphi_2 |\downarrow\rangle'_2)} \right) + \underline{(\cos\varphi_1 |\uparrow\rangle'_1 - \sin\varphi_1 |\downarrow\rangle'_1)} \underline{(\cos\varphi_2 |\uparrow\rangle'_2 - \sin\varphi_2 |\downarrow\rangle'_2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \underbrace{(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \underline{|\uparrow\rangle'_1} \underline{|\uparrow\rangle'_2} + \dots \right)$$

Wahrscheinlichkeit  $\propto$  Amplitude

für Prozess, daß 1. Teil  $\uparrow$  und 2. Teil  $\uparrow$ .

$$P_{\uparrow\uparrow}^{qm} = \frac{1}{2} \cos^2(\varphi_1 - \varphi_2)$$

hängt w. v. Differenz der  $\varphi$  ab.

### Klassisch Interpretation

entweder  $|\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 \xrightarrow{1} \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$   
oder  $|\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \xrightarrow{1} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$   
und jeweils 50/50 %  $\hookrightarrow$  Amplituden

$$P_{\uparrow\uparrow}^{klass} = \left( \sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_1 \cos^2\varphi_2 \right) \frac{1}{2}$$

Klassische Interpretation ohne Interferenzterm

offensichtlich gibt es Unterschiede zwischen klass. und qm. Interpretation f. verschränkte Zustände

Vgl. mit Exp:  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0 \rightarrow P_{\uparrow\uparrow}^{kl} = \frac{1}{2} = P_{\uparrow\uparrow}^{qm} \quad \checkmark$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow P_{\uparrow\uparrow}^{\text{kl.}} = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} P_{\uparrow\uparrow}^{\text{kl.}}$$

Exp. ist mit gm. Interpretation kompatibel.

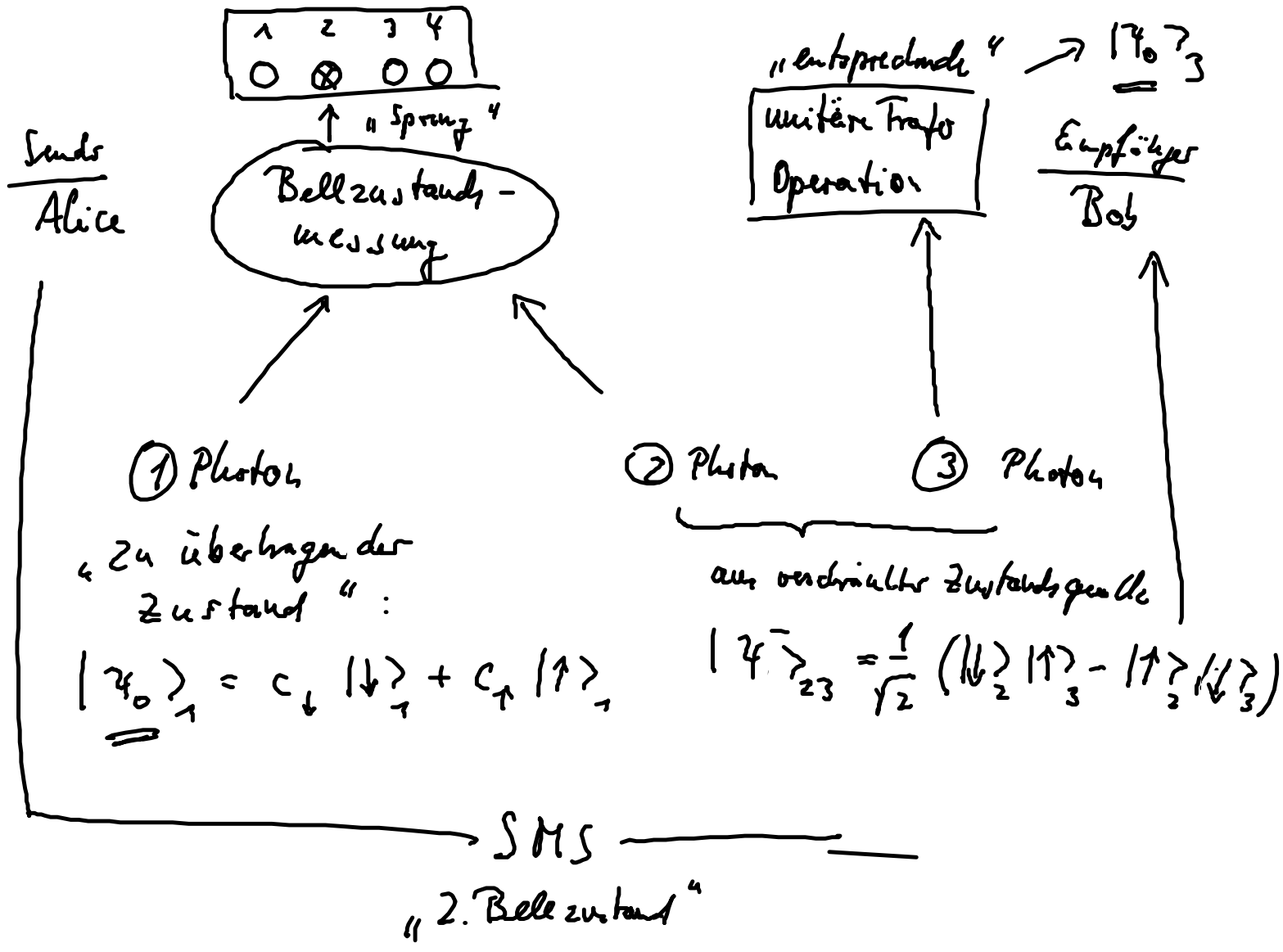
### 7.3. Teleportation

ein Teilchen Zustand wird in "Klassik" eingeleiten  
 und an einem anderen Ort wird derselbe Teilchen Zustand  
 ausgelesen aber: nicht durch Teilchen transfer

### Bemerkungen:

- a) no cloning theorem: ein Zustand kann auf ein  
 zweites Teilchen übertragen werden
- b) es wird keine Materie übertragen, nur Quanten info
- c) muß langsamer als  $c$  gehen (SRT)
- d) Vorschläge: 1993 Bennett  
 Vorschlag f. Photonen

Schemata:



Ziel der Teleportation: Zustand v. ① auf  
 andere Photon ③ übertragen  
 ② ist Hilfstücken

math. Schema d. Quanten teleportation

1.) Gesamtwellenfunktion zu Beginn (3 Teilchen)

$$|\psi\rangle_{123} = |\psi_0\rangle_1 |\psi_B\rangle_{2,3}$$

2.) Messung v. Alice an  $|\psi\rangle_{123}$  indem (1) und (2) auf Bellzustände projiziert werden

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{1,2,3} &= \sum_{\uparrow} |\text{Bell-zustand}\rangle_{1,2} a_{\uparrow} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\phi^+\rangle_{12} (c_{\downarrow} |\uparrow\rangle_3 - c_{\uparrow} |\downarrow\rangle_3) \right. \\ &\quad + |\phi^-\rangle_{12} (c_{\downarrow} |\uparrow\rangle_3 + c_{\uparrow} |\downarrow\rangle_3) \\ &\quad + |\psi^+\rangle_{12} (-c_{\downarrow} |\downarrow\rangle_3 + c_{\uparrow} |\uparrow\rangle_3) \\ &\quad \left. - |\psi^-\rangle_{12} (c_{\downarrow} |\downarrow\rangle_3 + c_{\uparrow} |\uparrow\rangle_3) \right) \end{aligned}$$

d. Messung „Spritzt“ System (1,2) in Bellzustand

3. Alice sagt Bob welche Bellzustand vorliegt.



→ wisse in welchem Zustand Teil 3 verbleibt

und kann Vorzeichen vor  $C_{T, \downarrow}$  durch  
am unteren Trafo beeinflussen kann