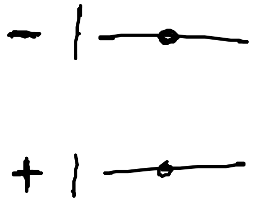
(iii) Auswertung Laserprozess

$$\left.\begin{aligned} \dot{n}_0 &= \Gamma n_0 \Delta - 2\kappa n_0 \\ \dot{\Delta} &= -2\Gamma \Delta n_0 - \Gamma_p (\Delta - \Delta_p) \end{aligned}\right\}$$ n_0 seien Photon in einer Resonatormode

2 phänomenologische Ergänzungen:

- Verluste durch Auskopplung aus Resonator: $-2\kappa n_0$ führt zu einer exponentiellen Dämpfung
- Pumpen der Inversion Δ zu einem Wert $\Delta_p > 0$ mit der Rate Γ_p

$-\Gamma_p(\Delta - \Delta_p)$ sorgt dafür, daß $\Delta \to \Delta_p$ wenn kein weiterer Prozess aktiv ist: „Batteriebetrieb d. Zweiniveausystems"



$\Big\}\ \Delta_p \equiv f_2^p - f_1^p$ sei > 0 f. Laser

Näherung $\dot{\Delta} = 0$, weil die Pumprate sehr hoch ist

$$\Gamma_p \Delta \gg \dot{\Delta}$$

die stationäre Glg. umstellen nach Δ:

$$\Delta = \frac{\Gamma_p \Delta_p}{(2\Gamma u_0 + \Gamma_p)} \quad , \quad \text{einsetzen in } \dot{u}_0 = \ldots$$

$$\underbrace{\dot{u}_0 = \Gamma u_0 \frac{\Gamma_p \Delta_p}{(2\Gamma u_0 + \Gamma_p)} - 2\kappa u_0}$$

Gleichung f. $u_0(t)$, also f. Photonen die sich im Laser aufbauen,

uns interessiert stationäre Zustand

$\dot{u}_0 = 0$ im laufenden Laserbetrieb

$\hat{=}$ konstanter Intensität

$$0 = u_0 \cdot \Big(\underbrace{\Gamma \frac{\Gamma_p \Delta_p}{(2\Gamma u_0 + \Gamma_p)} - 2\kappa}_{= 0} \Big)$$

$u_0^{(1)} = 0$

kein Photon

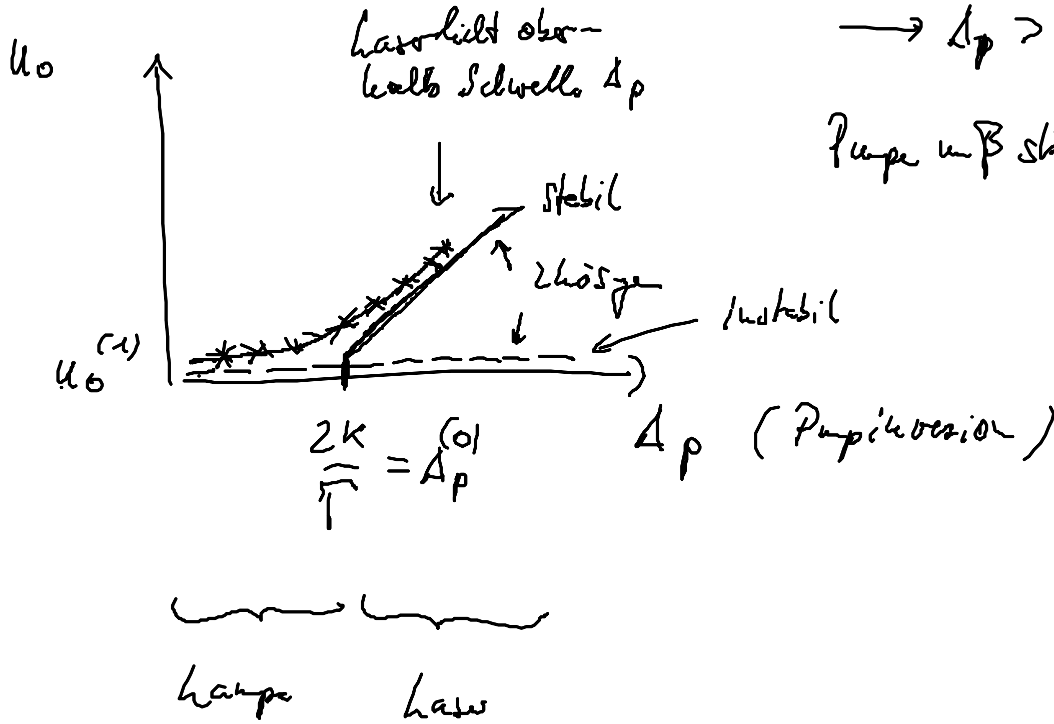
nach u_0 umstellen:

$$u_0^{(2)} = \frac{\Gamma_p}{4\kappa} \underbrace{\left(\Delta_p - \frac{2\kappa}{\Gamma} \right)}$$

physikalisch: > 0

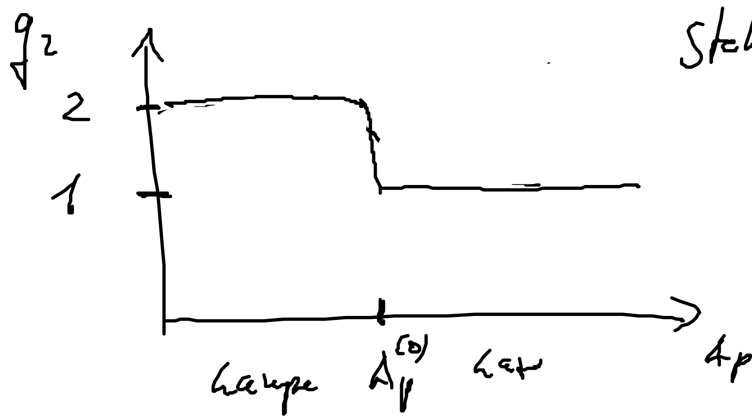
$\longrightarrow \Delta_p > \frac{2\kappa}{\Gamma}$

Pumpe muß stärker sein als Verluste



$\ast\!\ast\!\ast\!\ast$ mit spontaner Emission

Stabilität d. Lichts



d) Strahlungsdämpfung

Dämpfung der Dipoldichte $\langle \rho_{12} \rangle = \langle a_1^+ a_2 \rangle$, Polarisation

ÜA

$$\langle \dot{\rho}_{12} \rangle = \underline{\underline{i}}\,\omega_{12} \langle \rho_{12} \rangle - \gamma \langle \rho_{12} \rangle + \underline{\underline{i}}\,\delta_{12} \langle \rho_{12} \rangle$$

Zerfall d. Dipoldichte E-Verschiebg.

Energieverlust

e/ Raten

$$\Gamma = \left(\frac{\omega_0}{c} \right)^3 \frac{|d_{12}|^2}{\hbar \varepsilon_0} \frac{1}{3\pi} \sim \underline{\underline{\omega_0^3}}, \sim \underline{\underline{|d_{12}|^2}}$$

Auswahlregeln wichtig

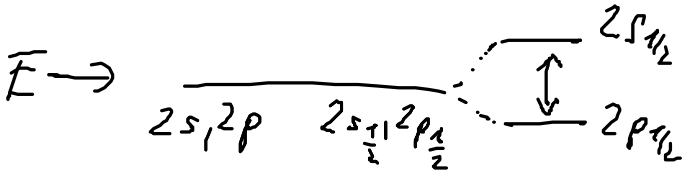
5.2. Aufhebung v. Entartungen durch das Vakuumstrahlungsfeld (Lambverschiebung)

a/ Idee:

- Selbst wenn $\langle n_{\lambda k} \rangle = 0$, also Photonenvakuum liegen Vakuumfluktuation vor.

→ unter Umständen Aufhebung v. Entartungen

prominentes Bsp:



s, p Zustände: Entartg. aufgehoben

Schrödinger, Pauli	Dirac $j = \frac{1}{2}$	Lamb, Hänsch, Bethe (nichtrelativ.), $\underbrace{\text{Schwinger, Feynman}}$ (relativistisch)	→ $\updownarrow$ ≙ Absorptionsprozess „Lambshift“

b) Störungstheorie f. Einfluß d. Vakuums auf E-Verschiebg. in Atomen

muß bis 2. Ordng. gerechnet werden

ΔE_n (1 Elektr. in Zustand n mit Umgebg. v. 0 Photonen) = ?

n – Quantenzahl Atom (p, s)

Zustände (QZ)

$$|\varphi_n\rangle = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & n & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\,0\,0 \end{matrix}\right\rangle \left|\begin{matrix} \lambda_1 k_1, & \lambda_2 k_2, & \ldots, & \\ 0 & 0 & 0\,0 & 0 \end{matrix}\right\rangle$$

El-Zahl

Elektronischer Zustand photonischer Zustand

≙ Produkt ohne WW

erste Ordng Störungstheorie $\langle \varphi_n | H_{el-pt} | \varphi_n \rangle = 0$, denn

H_{el-pt}: $a^+_{n_1} a_{n_2} (c_{\lambda k} + c^+_{\lambda k})$

jed Erzeugg. / Vernichtg. bei Photonen bringt Orthogonalität der Photonenzustände

$$\Delta \varepsilon_n^{(2)} = \sum_x \frac{|\langle \varphi_n | H_{el-pt} | \varphi_x \rangle|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_x}$$

x: alle mögl. Zustände d. Hilbertraums
$x \neq n$

$$H^{(1)}_{el-pt} : \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2$$

~~früher~~ $\vec{r} \cdot \vec{E}$

soll nicht genommen werden, weil f. El. im freien Raum Dipolnäherg. zusammenbricht

$$= \frac{1}{2m} \vec{p}^2 \underbrace{- \frac{q}{m} \vec{A} \cdot \vec{p}}_{WW-H} + \cancel{A^2}$$

RW-Näherg. taucht dieser nicht auf

(Coulombeichg $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$)

$$\vec{A} = \sum_{\lambda k} \underline{\underline{f_k}} \, \vec{e}_{\lambda k} \, e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \, c_{\lambda k}(t) + h.a.$$

$$H_{el-pt} = - \sum_{\substack{n_1 n_2 \\ \lambda k}} g^{\lambda k}_{n_1 n_2} \left(a^+_{n_1} a_{n_2} c_{\lambda k} + h.a. \right)$$

$$g^{\lambda k}_{n_1 n_2} = \underbrace{\frac{q}{m}\,(2\hbar\omega_k\,\varepsilon_0 V)^{-1/2}}_{f_k} \int d^3r\, \varphi^*_{n_1}(\vec r)\, \vec e_{\lambda k}\cdot\vec p\,\varphi_{n_2}(\vec r)$$

$(e^{i\vec k\vec r})$

Matrixelement^2

$$\Delta\varepsilon_n^{(2)} = \sum_{n'\lambda k} \frac{|g^{\lambda k}_{nn'}|^2}{\varepsilon_n - \underbrace{\varepsilon_{n'} - \hbar\omega_k}}$$

(ohne Beweis, 5 Zeilen)

Zustandsenergie d. ungestörten d. Zustands

alle anderen Zustandsenergien die über zählen beitragen.

$$= \sum_{n'\lambda k} \frac{q^2}{m^2}\frac{1}{2\hbar\omega_k\varepsilon_0 V}|\vec p_{nn'}\cdot\vec e_{\lambda k}|^2 \frac{1}{\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}-\hbar\omega_k}$$

$\sum_k \to \int d^3k \frac{V}{(2\pi)^3}$

$\omega = ck$

$$= \sum_{n'} \frac{\cancel{V}}{(2\pi)^3}\int dk\,k^2 \sum_\lambda \underbrace{\int d\Omega_k}_{\text{Winkel}} \frac{|\vec p_{nn'}\cdot\vec e_{\lambda k}|^2}{\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}-\hbar\omega_k}\,\frac{q^2}{2\hbar\varepsilon_0\omega_k \cancel{V} m^2}$$

$$= \frac{1}{6\pi^2}\frac{q^2}{\hbar\varepsilon_0 m^2 c^3}\sum_{n'}\int_0^\infty d\omega\,\omega\,\frac{|p_{nn'}|^2}{\varepsilon_n-\varepsilon_{n'}-\hbar\omega} = \infty$$

für große $\omega \to \infty$

Integrand $\sim \frac{\omega}{\omega} \to 1$

Idee v. Bethe:

im Exp. wird endlich Masse gemessen.

aber die Vakuum fluktuationen sind darin enthalten!

$\rightarrow$ die ∞ kraft wird jetzt gesteckt in die exp. Masse geschoben

b) freies Elektron in WW mit Vakuum

$$|n\rangle \rightarrow |\vec{k}\rangle \hat{=} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

$\vec{k}$: ebene Welle

Achtg.: $\vec{k}$ ist Elektron wellenvektor nicht Licht!

$$\Delta \varepsilon_{\vec{k}}^{(2)} = ?$$

$$\text{Pu'u} \Rightarrow \langle \vec{k}' | \vec{p} | \vec{k} \rangle = \int d^3r \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{\sqrt{V}}$$

$$= \frac{\hbar}{i} (i\vec{k}) \delta(\vec{k}-\vec{k}') \sim \hbar\vec{k}\, \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

$$\Delta \varepsilon_{\vec{k}}^{(2)} = \frac{1}{6\pi^2} \frac{q^2}{\hbar \varepsilon_0 m^2 c^3} \int d\omega\, \omega \sum_{k'} \frac{(\hbar k)^2 \delta_{kk'}}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k'} - \hbar\omega}$$

$$= -\frac{\hbar^2 k^2}{2} \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{3\pi^2} \frac{q^2}{\hbar^2 \varepsilon_0 m^2 c^3} \int_0^\infty d\omega = \infty$$

$$\underset{\substack{\text{Elektronenergie}\\ \text{mit Vakuum}}}{E_{\text{mit Vakuum}}} = \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}}_{\substack{\text{nackte}\\ \text{Energie}}} - \frac{\hbar^2 k^2}{2}\alpha \equiv \underline{\underline{\frac{\hbar^2 k^2}{2 m_{exp}}}}$$

c) Anwendg auf gebundene Elektron

$$H = \frac{p^2}{2m} + \underbrace{V(\vec{r})}_{\text{Kern}} + H_{el-pt}$$

$$= \frac{p^2}{2m_{exp}} + V(\vec{r}) + \underbrace{H_{el-pt} + \frac{\alpha \vec{p}^{\,2}}{2}}$$

neue Störg. f. das „experimentelle" Elektron

alles wie vorher aber $\frac{\alpha \vec{p}^{\,2}}{2}$ noch addieren!

$$\Delta \varepsilon_n^{(2)} \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{6\pi^2}\frac{q^2}{\hbar^2 \varepsilon_0 m^2 c^3}}_{\alpha/2}\left[\underbrace{\int_0^\infty d\omega\, \omega \sum_{n'} \frac{|p_{nn'}|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega}}_{\text{alt}} + \underbrace{\int_0^\infty d\omega\, \omega \frac{p_{nn}^2}{\hbar\omega}}_{\text{neuer Hilfsterm}}\right]$$

$$\langle n | p^2 | n \rangle = \sum_{n'} \langle n | p | n' \rangle \langle n' | p | n \rangle = \sum_{n'} |p_{nn'}|^2$$

$$= \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty d\omega\, \cancel{\omega} \sum_{n'} |p_{nn'}|^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega} + \frac{1}{\hbar\omega} \right)}_{\underbrace{\frac{1}{\hbar \cancel{\omega}} \left(\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'}}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega} \right)}}$$

$=$

Integrand, nicht mehr so stark divergent

$$\underbrace{\int d\omega}_{\text{freie}} \rightarrow \underbrace{\int d\omega \frac{1}{\omega}}_{\text{angezogene Elektron}} \sim \ln\omega$$

nicht mehr so schlimm divergent

in relativistischer Theorie wird das Integral bei Compton wellenlänge / frequenz abgeschnitten

$$\int_0^{\omega_{max}} d\omega$$

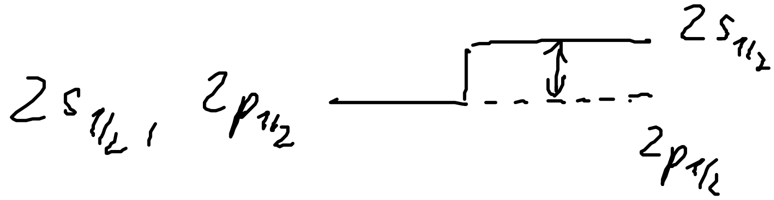
durch Abschneiden

$$\Delta\varepsilon_n^{(2)} = \frac{\alpha}{2} \sum_{n'} |p_{nn'}|^2 (\varepsilon_n - \varepsilon_{n'}) \ln \left| \frac{mc^2}{\hbar\omega_{n'} - \hbar\omega_n} \right|$$

$\rightarrow$ ist endlich

$$\sim \underbrace{|\varphi_n(\vec{r}=0)|^2}_{\text{Wasserstoff}} \neq 0 \text{ f. } s\text{-Zustände}$$

in Atom



Die s-Zustände d. H-Atoms
werd. d. das Vakuumfeld verschoben.
p, s → Aufspaltg.