

VI Relativistische Quantentheorie

- Problem: S. Gl ist nicht-relativistisch, denn es werden Raum & Zeit ungleich behandelt:

$$\begin{array}{ccc} \hbar \partial_t \psi & = & - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{1. Ordnung} & & \text{2. Ordnung} \end{array}$$

→ 2 Mgl. für Korrektur:

- (a) weitere Zeitableitung zufügen → Klein-Gordon-Gl.
(Spin 0)
- (b) weglassen einer Ortsableitung → Dirac-Gl.
(Spin $\frac{1}{2}$)

0. Wiederholung der relativistischen Beschreibung

(1) Raum u. Zeit werden zur Raumzeit verknüpft

→ Einführung von 4er Vektor für Ereignisse

- kovariant: $x^\mu = (ct, \vec{r}) = (ct, x, y, z)$
 $= (x^0, x^1, x^2, x^3)$

- kovariant: $x_\mu = (ct, -\vec{r}) = (ct, -x, -y, -z)$
 $= (x_0, x_1, x_2, x_3)$

- Index : griechisch $\mu = 0, 1, 2, 3$ Raumzeit
 lateinisch $i = 1, 2, 3$ Raum

- Lorentzmetrik : $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$

mit $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$

→ Wechseln : $x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu}$ und $x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu}$

→ Einstein'sche Summenkonvention : über gleiche Indices (einer hoch- und einer tiefgestellt) wird summiert

(2) Eigenzeitintervall

(Wegelement der Raumzeit)

- Quadrat des Ereignisabstandes der Ereignisse mit Koord. x^{α} und $x^{\alpha} + dx^{\alpha}$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$= c^2 dt^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \underbrace{\left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right\}}_{\dot{\vec{r}}^2} \right]$$

$$\text{mit } d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{r}}^2}{c^2}} dt$$

$$= \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt$$

Invariant in verschiedenen Bezugssystemen (IS)

→ Parameterdarstellung der Raumzeit

$$x^\mu(\tau) = (ct(\tau), x(\tau), y(\tau), z(\tau))$$

(3) 4er Impuls als Fkt. von τ

$$\begin{aligned} p^\mu &= m_0 \frac{d}{d\tau} x^\mu(\tau) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}} \frac{d}{dt} (ct, x, y, z) \\ &= (m(t)c, m(t)\dot{x}, m(t)\dot{y}, m(t)\dot{z}) \end{aligned}$$

m_0 - Ruhemasse

Da $E = m(t)c^2 \rightarrow \frac{E}{c} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ folgt

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad \text{mit} \quad \vec{p} = m(t)\vec{v}$$

(4) Länge eines 4er Vektors ist invariant unter IS-Wechsel

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu &= p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \\ &= \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \vec{p}^2 = \frac{m_0^2 c^2}{\left(\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^2} - m^2(t)v^2 = m_0^2 c^2 \end{aligned}$$

(5) Relativistische Energie-Impuls-Beziehung

aus (4) folgt:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

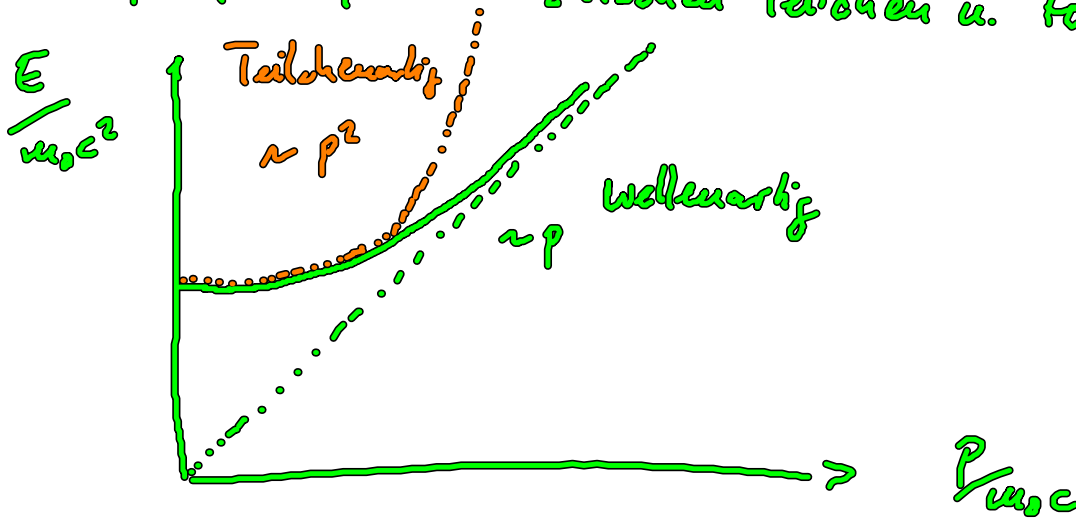
Wenn sich ein Objekt mit Geschwindigkeit $\frac{v}{c} < 1$
 (mit v in Größenordnung von c) bewegt:

$$E(p) = (m_0^2 c^4 + p^2 c^2)^{\frac{1}{2}} \approx \begin{cases} m_0 c^2 + \frac{p^2}{2m} & \text{für } p \ll m_0 c \\ pc & \text{für } p \gg m_0 c \end{cases}$$

→ $\frac{p^2}{2m}$ aus klass. nicht-rel. Mechanik: Teilchen

→ pc de Broglie $p = \hbar k$, $E = \hbar \omega$
 $\omega = ck$ Wellenausbreitung

$E(p)$ „interpoliert“ zwischen Teilchen u. Feldern



→ Eine einheitliche Beschreibung von Felder u. Teilchen

muß relativistisch und gen sein

$$E(p)$$

$$p = \hbar k, E = \hbar \omega$$

1. Die Klein-Gordon-Gleichung

1.1. Herleitung

- Schröd. Gl aus de-Broglie Relation:

$$E = \frac{p^2}{2m} \quad \text{via} \quad E \rightarrow i\hbar \partial_t, \quad p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla$$

$$\rightarrow i\hbar \partial_t \psi = + \frac{p^2}{2m} \psi$$

- relativ. Energie-Impuls Beziehung: $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi(\vec{r}, t) = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4) \psi(\vec{r}, t)$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\vec{r}, t) = 0$$

- in 4er Schreibweise: $\square = \partial_\mu \partial^\mu = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$.

$$(\partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z)$$

$$\boxed{\left(\square + \frac{1}{\lambda_c^2} \right) \psi(\vec{r}, t) = 0}$$

Klein-Gordon-Gl.
für rel. Teilchen

mit Compton-Wellenlänge $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c}$

1.2 Kontinuitätsgleichung

• Erinnerung S. Gl:

- W. dichte : $S = |\psi|^2$

- W. Stromdichte : $\vec{j} = \frac{\hbar}{2m_0} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$

$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0$

Ermöglicht die Interpretation der Schrödingers Formulierung als statistische Theorie die Wahr. aussagen macht

• Klein-Gordon-Funktion ψ :

I $\psi^* (\partial_\mu \partial^\mu + \lambda_c^{-2}) \psi = 0$

II $\psi (\partial_\mu \partial^\mu + \lambda_c^{-2}) \psi^* = 0$

(1) konjugieren und mit ψ/ψ^* multiplizieren

(2) Differenz bilden : I - II

$\partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi) - \partial_\mu (\psi \partial^\mu \psi^*) = 0$

(3) Multiplizieren mit $\frac{\hbar^2}{2m_0 c^2}$

$\partial_\mu \left(\frac{\hbar^2}{2m_0 c^2} (\psi^* \partial^\mu \psi - \psi \partial^\mu \psi^*) \right)$

$- \vec{\nabla} \cdot \frac{\hbar^2}{2m_0} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) = 0$

$\Rightarrow \partial_\mu \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ mit

- K-G-Dichte : $\rho = \frac{\hbar^2}{2m_0 c^2} (\psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*)$

- Stromdichte :
$$\vec{j} = \frac{t}{2m_0} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*)$$

• Problem : \mathcal{P} ist nicht positiv definit, also evtl. $\mathcal{P} < 0$

→ Keine Wahr. interpretation mehr mögl.

• Grund : Klein-Gordon-Gl (KGG) ist DGl. 2. Ord.
Anfangswerte für ψ und $\dot{\psi}$ zu einem festen Zeitpunkt können unabh. gewählt werden

• Idee : Ladungsdichte interpretation (später)

1.3 Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung

• Erinnerung E-Dynamik :

Ebene Wellen sind Lsg. der Wellengl. und bilden Basis nach dem jede Lsg. entwickelt werden kann.

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{p}} A(\vec{p}) \exp\left[\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - E(\vec{p})t)\right]$$

ebene Welle

\vec{p}
 \nearrow
 Amplitude

\uparrow
 $\vec{p} = \hbar \vec{k}$

\uparrow
 $E = \hbar \omega$

• Dispersionsrelation $E(\vec{p})$ für KGG : (Ersetze)

$$-\frac{\vec{p}^2}{\hbar^2} + \frac{1}{c^2} \frac{E^2}{\hbar^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} = 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$E(p) = \pm c \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} =: \pm E(p)$$

- es gibt zu festem Impuls \vec{p} immer 2 Lsg.:

$$\psi_{\pm}(p) = A_{\pm} e^{\frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - E_{\pm}(p) t)} \quad \text{mit } E_{\pm}(p) = \pm E(p)$$

- in Schröd. Theorie war E die Energie. Gibt es negative Energien beim freien rel. Teilchen? NEIN!
- später: ψ_+ als auch ψ_- haben Energie $|E_{\pm}|$
(erst bei Dirac gibt es neg. Energie)
- sind das vllt pos. und neg. geladene Teilchen? ja