- kurze Wdh.:
  - S.Gl. nicht rel. invariant
  - $\longrightarrow$ weitere Zeitabl. hinzufügen: Klein-Gordon-Gl.
  - aus relativistischen Energie-Impuls-Bez.:

$$E^2(p) = p^2c^2 + m_0^2c^4 \qquad E \to i\hbar\,\partial_t \qquad p \to \frac{\hbar}{i}\nabla$$

$\longrightarrow$ KGG: $\left(\Box + \frac{1}{\lambda_c^2}\right)\psi = 0$

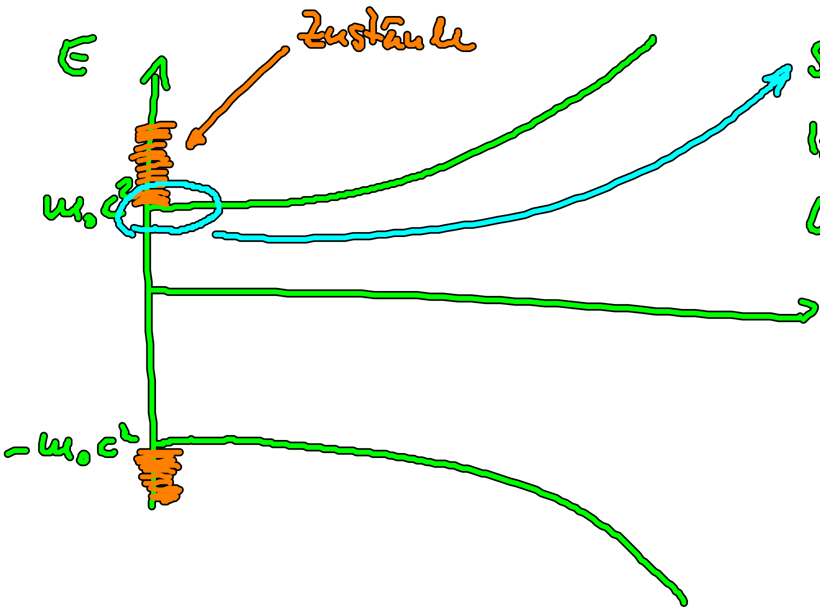
$$\Box = \partial_\mu\partial^\mu = (\partial_{ct}, \partial_x, \partial_y, \partial_z)\cdot(\partial_{ct}, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z)$$

- Kontinuitätsgl: <u>Problem</u> ρ nicht pos. definit (Ladungsdichteinterpretation?)
- Lösungen der KGG: $E_\pm(p) = \pm c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2}$

$\longrightarrow \psi_\pm$ gibt es neg. Energien? (Nein)

1.4 Ladung von Teilchen/Anti-Teilchen Paar, neutrales Teilchen

• $E_\pm$ - Spektrum der KGG: ($E_\pm$ nicht als Energie interpretieren)



Schrödinger-Welt: $E = \frac{p^2}{2m}$
ist Näherung des oberen der beiden Lsg. mit m_0c^2 als Nullpkt.

• Ladungsdichte: $\rho \to e_0\rho$ mit $e_0 > 0$

$$e_0\rho = \frac{i\hbar e_0}{2m_0c^2}\left(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*\right)$$

• Gesamtladung eines Teilchens: $q = \int d^3r\, e_0\rho$

wir nehmen $\psi_+ \to e^{-\frac{i}{\hbar}E(p)t}$ und $\psi_- \to e^{+\frac{i}{\hbar}E(p)t}$

$$\to q_\pm = \pm\frac{e_0}{m_0c^2}\left|A_\pm(p)\right|^2 c\left(p^2+m_0^2c^2\right)^{1/2}\underbrace{L^3}_{\int d^3r}$$

• Interpretation: Teilchen/Anti-Teilchen paar

$\psi_+(E>0)$ beschreibt Teilchen mit Ruhemasse m_0 u. Lad. $q_+ > 0$

$\psi_-(E<0)$ ——— " ——— $q_- < 0$

→ ein Paar gleicher Masse, aber entgegengesetzter Ladung

→ jede relativistische Theorie ist eine Vielteilchentheorie und die Einteilchenbeschreibung ist hier nicht mehr zu retten. (Paarerzeugung aus Vakuum bei starken Feldern)

- Normierung: über Ladung festgelegt

$$A_\pm(p) = \Big(\underbrace{\frac{|q_\pm|}{e_0}}_{\text{Anzahl der Ladungen}} \frac{m_0 c^2}{E(p)\, L^3} \Big)^{1/2}$$

- Neutrales Teilchen: Superposition von Teilchen / Antiteilchen

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi_+(p) + \Psi_-(-p) \right)$$

$$= \left(\frac{m_0 c^2}{2 E(p) L^3} \right)^{1/2} 2 \cos \left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{r} - E(\vec{p})t}{\hbar} \right)$$

- Bemerkungen:

(a) zu festen Impuls $\vec{p}$ gibt es (im Vgl. zur Schröd. theorie) 3 neue Ladungsfreiheitsgrade: pos, neg, neutral

(b) LadungsFG entstehen durch konsequenten Relativismus

(c) Neben Raum- und LadungsFG gibt es eigentlich auch SpinFG, sehen wir nicht

$\longrightarrow$ $\boxed{\text{KGG beschreibt Spin-0 Teilchen}}$

1.5 Pionen – Bsp. für massereiche Spin 0-Teilchen

- Pionentriplett: π^+, π^-, π^0

Yukawa versucht 1935 WW zwischen Nukleonen (Kernkraft) zu erklären über Analogie zur E-Dynamik:

elektromagn. Kraft

Elektronen

$\ominus \xleftrightarrow{\text{Photonen}} \ominus$

Laplace-Gl.:

$$(\Delta - 0)\varphi = 0$$

$$\lambda_c^{-2} = 0 \rightarrow \text{Masse} = 0$$

$$\varphi \sim \frac{1}{r}$$

Coulombpotential

„langreichweitig"

Kernkraft

Nukleonen

$\circ \xleftrightarrow{\text{Pionen}} \circ$

KGG:

$$(\Delta - \lambda_c^{-2})\psi = 0$$

$$\lambda_c^{-2} \neq 0 \rightarrow \text{Masse} \neq 0$$

$$\psi \sim \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_c}}$$

abgeschirmtes Coulombpotential

„kurzreichweitig"

1.6 Energie von Teilchen und Antiteilchen

- Schröd.theorie: $\underline{H}\,\varphi_n = E_n\,\varphi_n$ $\quad E_n$ – Energie des Teilchens – EW zum Hamiltonian

$\longrightarrow$ suchen Hamiltonfkt für KGG über kanon. Formalismus

Lagrangedichte $\longrightarrow$ Hamiltondichte $\longrightarrow$ Energie

(a) Raten einer richtigen Lagrangedichte

2 unabh. Felder: $\psi,\ \psi^*$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\nu \psi^*)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\left(g_{\mu\nu}(\partial^\mu \psi)(\partial^\nu \psi^*) - \lambda_c^{-2}\psi^*\psi \right)$$

(b) Bestätigung von $\mathcal{L}$ durch Ableiten der KGG

- Euler-Lagrange-Gl.: $\partial^\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi^*)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = 0$

$$\partial^\mu(g_{\mu\nu}\partial^\nu \psi) + \lambda_c^{-2}\psi = 0$$

$$\Rightarrow \left(\underbrace{g_{\mu\nu}\partial^\mu}_{\partial_\nu}\partial^\nu + \lambda_c^{-2}\right)\psi = 0 \quad \checkmark$$

$\mathcal{L}$ ist korrekt

(c) Hamiltondichte ausrechnen und Energie bestimmen

– kanon. konjugierte Impulse:

$$\Pi_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \psi)} = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\partial^0 \psi^*$$

$$\Pi_{\psi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 \psi^*)} = \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\partial^0 \psi$$

– Legendre-Trafo: $\mathcal{H}(\vec{r},t) = \Pi_\psi \partial^0\psi + \Pi_{\psi^*}\partial^0\psi^* - \mathcal{L}$

$$\mathcal{H} = 2\,\frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\partial^0\psi\,\partial^0\psi^* - \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\Big(\underbrace{g_{\mu\nu}(\partial^\mu\psi)}_{\partial_\nu\psi}(\partial^\nu\psi^*) - \lambda_c^{-2}\psi^*\psi\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\Big[\partial^0\psi\,\partial^0\psi^* + (\partial^i\psi)(\partial^i\psi^*) + \lambda_c^{-2}\psi^*\psi\Big]$$

– Energie: $E(t) = \int d^3r\, \mathcal{H}(\vec{r},t)$

einsetzen von Teilchen/Anti-Teilchen Lsg. $\psi_\pm$:

$$E_\pm(t) = \frac{\cancel{\hbar^2}}{2m_0}\int d^3r\,\frac{|q_\pm|}{e_0}\frac{m_0c^2}{E(p)L^3}\left(\frac{(\pm E(p))^2}{\cancel{\hbar^2}c^2} + \frac{(p_\pm)^2}{\cancel{\hbar^2}} + \frac{m_0^2c^2}{\cancel{\hbar^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{|q_\pm|}{e_0}\frac{1}{E(p)}\Big(E^2(p) + \underbrace{p^2c^2 + m_0^2c^4}_{E^2(p)}\Big)$$

$$= \frac{|q_\pm|}{e_0}E(p) > 0 \qquad \left(E(p) = c\sqrt{m_0^2c^2 + p^2}\right)$$

Teilchen/Antiteilchen Lsg. der KGG haben eine Energie $E(p) > 0$.
$E_\pm$ sind nur Parameter, die die $\psi_\pm$ kennzeichnen.

1.7 Teilchen/Antiteilchen Wellen

Relativ. Theorie ist immer eine Vielteilchentheorie:

- Beispiel: neg. Pion im stationären Potential ϕ eines pos. Kerns. (Pionatom)

- allgem.: Teilchen in Potential

$$\left.\begin{array}{l} i\hbar\partial_t \longrightarrow i\hbar\partial_t - q\phi \\ \vec{p} \longrightarrow \vec{p} - q\vec{A} \end{array}\right\}$$

Teilchen in em Feld $(\phi, \vec{A})$

- hier: statisches ϕ, $\vec{A} = 0$ (nur Kernpotential)

- KGG für Teilchen in Pot ϕ:

$$(i\hbar\partial_t - q\phi)^2\psi = -c^2\hbar^2\nabla^2\psi + m_0^2c^4\psi$$

- Ladungsdichte:

$$q\rho = \frac{i\hbar q}{2m_0c^2}\left(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*\right) - \frac{q^2}{m_0c^2}\phi\,\psi\psi^*$$

stat. Problem: $\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\varphi(\vec{r})$ einsetzen

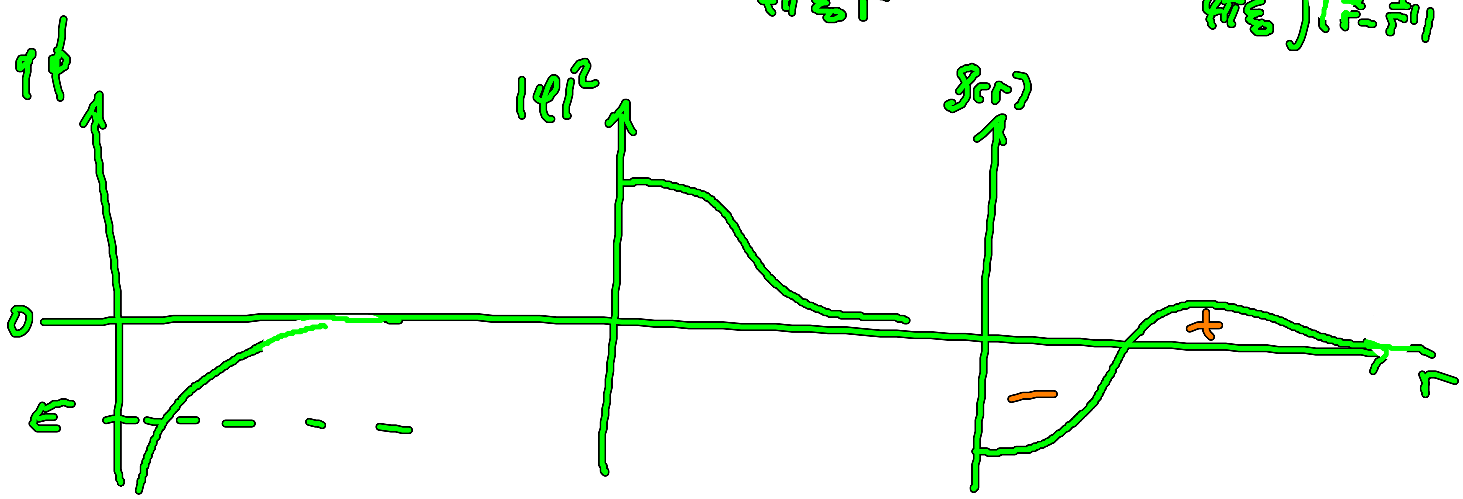
$$q\rho = \frac{\hbar q}{m_0 c^2}\left(E - q\phi(\vec{r})\right)\varphi^*(\vec{r})\varphi(\vec{r})$$

$\longrightarrow$ $\varphi(\vec{r})$ kann aus stat. KGG bestimmt werden:

$$\left[(E-q\phi)^2 - m_0^2c^4 + c^2\hbar^2\nabla^2\right]\varphi(\vec{r}) = 0$$

- Annahme: gebundener lokalisierter Zustand aus neg. Meson ($q=-e_0$) und pos. Ion ($q = Ze$)

$$E - q\phi \longrightarrow E - (-e_0)\frac{Ze_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}d^3r'$$



- Interpretation:

Ein Teilchen ist beim Anliegen eines Potentials ϕ immer auch von Antiteilchen umgeben.

1.8 „Langsame" KGG ist die Schröd.gl.

• Ansatz: $\Psi(\vec{r},t) = \tilde{\Psi}(\vec{r},t)\, e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}$

langsam gegen angeregte Nullpkt.-oszillation

$$\partial_t^2 \Psi = \partial_t \left[\left(\partial_t \tilde{\Psi} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \tilde{\Psi} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t} \right]$$

$$= \Big[\underbrace{\partial_t^2 \tilde{\Psi}}_{\approx 0} - \frac{2i}{\hbar} m_0 c^2 \partial_t \tilde{\Psi} - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} \tilde{\Psi} \Big] e^{-\frac{i}{\hbar} m_0 c^2 t}$$

weg-heben

einsetzen in $\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right] \Psi = 0$

$$\Rightarrow \quad i\hbar\, \partial_t \tilde{\Psi} = -\frac{\hbar^2}{2 m_0} \nabla^2 \tilde{\Psi}$$