Zeitordnung: R. Feynman Physical Review 84 (1951)

Operator calculus having applications in QED

z.B.

$$U = T e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt\, H(t)} \quad \text{mit } H = H_0 + V(t)$$

$$= T e^{-\frac{i}{\hbar}\int dt\,(H_0 + V(t))} \underset{\uparrow}{=} T e^{-\frac{i}{\hbar}\int dt\, H_0}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\int dt\, V(t)}$$

analog Algebra mit Funktionen, geht nicht ohne später T zu beachten

V sei Störung:
$$\approx T\left(1 - \frac{i}{\hbar}\int dt\, V(t)\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\int dt\, H_0}$$

$$\underset{\nearrow}{\Delta U} = T\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt\, \underline{\underline{V(t)}}\; e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt'\, \underline{\underline{H_0(t')}}}\right)$$

Änderung von U durch V in erster Ordnung

V(t) darf nur links stehen, wenn $t > t'$

$$= -\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dt\; e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t}^{t_2} dt'\, H_0(t')}\; V(t)\; e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t} dt'\, H_0(t')}$$

$t' < t$

H_0 steht rechts von $V(t)$

3.2. Wicktheoreme

3.2.1. Motivation zum IBM

$|c\rangle$ ——— Phonon

ZNS

$|v\rangle$ ———

Observable $\langle q\vec{r}\rangle = \sum_{\alpha, n, m} \langle n | q\vec{r} | m\rangle \sum_{\alpha} \rho^{\alpha\alpha}_{mn}$

Dipoloperator

α, n, m: Phonon, ZNS, Identität $|m\rangle\langle m|$

$\underbrace{\text{Phonon ZNS}}_{\text{Spur}}$

2 Niveaus $\quad n, m = c, v$

$$= \underbrace{\vec{d}_{cv}}_{\langle c | q\vec{r} | v\rangle} \sum_{\alpha} \rho^{\alpha\alpha}_{cv} + \text{c.c.}$$

letzte VL

$$= \vec{d}_{cv} \underbrace{\sigma_{cv}(0)}_{\substack{\text{Anfangsbedingg. ZNS} \\ \text{optische Anregg.}}} e^{-i\omega_{cv} t} \sum_{\alpha} \underbrace{\langle \alpha | \mathcal{V}_{cv}(t, B_\alpha) | \alpha\rangle}_{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^t dt_n\, T \underbrace{\sum_{\alpha} g^{\alpha} B_\alpha(t_1)}\cdots\underbrace{\sum_{\alpha} g^{\alpha} B_\alpha(t_n)}} + \text{c.c.}$$

$\phi(t_2) \quad \phi(t_4)$

um nichts auszuwerten ist

$$\sum_\alpha \langle \alpha | \quad | \alpha \rangle$$ zu berechnen

interessant ist: $\underbrace{\langle T\, \phi(t_1) \cdots \phi(t_i) \cdots \phi(t_n) \rangle}$

$$\langle \cdot \rangle = Sp_{phon} \left(\cdot \, \rho^{ph}_{eq} \right)$$

Antwort: Wicktheorem: gibt Antwort wie so vielen Operatorfalten in kleine, handliche Bausteine zerlegt werden

3.2.2. Bosonen

$$\langle T\, \phi(t_1) \cdots \phi(t_i) \cdots \phi(t_n) \rangle$$

a) Bausteine $D(t_1 - t_2) = \langle T \phi(t_1) \phi(t_2) \rangle$ Phonon Greensfkt. Phononpropagator

$$= \Theta(t_1 - t_2) \langle \phi(t_1) \phi(t_2) \rangle + \Theta(t_2 - t_1) \langle \phi(t_2) \phi(t_1) \rangle$$

$$= \Theta(t_1 - t_2)\, sp_{ph}\Big(\sum_{\alpha_1 \alpha_2} g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \left(b_{\alpha_1}(t_1) + b^+_{\alpha_1}(t_1)\right)\left(b_{\alpha_2}(t_2) + b^+_{\alpha_2}(t_2)\right) \cdot \frac{e^{-H_{ph}\beta}}{Z}\Big) + \underbrace{\{t_1 \leftrightarrow t_2\}}$$

$$= \Theta(t_1 - t_2) \sum_{\alpha_1 \alpha_2} g_{\alpha_1} g_{\alpha_2}\, sp_{ph}\left(b_{\alpha_1}(t_1)\, b^+_{\alpha_2}(t_2) + b^+_{\alpha_1}(t_1)\, b_{\alpha_2}(t_2)\, \frac{e^{-\beta H_{ph}}}{Z}\right) + \{t_1 \leftrightarrow t_2\}$$

$$= \Theta(t_1 - t_2) \sum_{\alpha} g_\alpha^2 \left[(1 + u_\alpha)\, e^{-i\omega_\alpha (t_1 - t_2)} + u_\alpha\, e^{+i\omega_\alpha (t_1 - t_2)} \right] + \{t_1 \leftrightarrow t_2\}$$

Besetzungszahl der Phononmode

$$D(t_1 - t_2) = \sum_\alpha g_\alpha^2 \left[(1 + u_\alpha)\, e^{-i\omega_\alpha |t_1 - t_2|} + u_\alpha\, e^{+i\omega_\alpha |t_1 - t_2|} \right]$$

Phononpropagator

b/ 1. Wicktheorem

Zeitgeordnetes Produkt von Bosonoperatoren ϕ im WW Bild

wird in alle Kombinationen des Grundbausteins zerlegt

$$\langle T \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n \rangle = \sum_{\{\pi\}} \prod_{P_{ab}} \langle T \phi_a \phi_b \rangle$$

z.B. $\langle T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle =$

$$\langle T \phi_1 \phi_2 \rangle \langle T \phi_3 \phi_4 \rangle + \langle T \phi_1 \phi_3 \rangle \langle T \phi_2 \phi_4 \rangle$$

$$+ \langle T \phi_1 \phi_4 \rangle \langle T \phi_2 \phi_3 \rangle$$

3.2.3. Fermionen

$$\langle T a_1^+ a_2 a_3 a_4 \cdots \rangle = ?$$

a/ Baustein $\overrightarrow{G}_{12}(t_1 - t_2) = \langle T a_1^+(t_1) a_2(t_2) \rangle$

$$\overleftarrow{G}_{12}(t_1 - t_2) = \langle T a_1(t_1) a_2^+(t_2) \rangle$$

$$\langle T \cdots \rangle = \mathrm{sp}\,(T \cdots \rho^0_{el})$$

Gleichgewichts-statistischer Operator

$$\overrightarrow{G}_{12}(t_1 - t_2) = \theta(t_1 - t_2)\, e^{-i\omega_{k_1}(t_1 - t_2)}\, \delta_{k_1 k_2}\, f_{k_1}$$

Elektronen

$$+\, \theta(t_2 - t_1)\, e^{+i\omega_{k_1}(t_1 - t_2)}\, \delta_{k_1 k_2}\, (1 - f_{k_1})$$

Löcher

f_{k_1} : Besetzungszahl im Gleichgewicht (Fermi)

$$\overleftarrow{G}_{12}(t_1 - t_2) = \overrightarrow{G}_{12}(t_1 \leftrightarrow t_2)$$

b) 2. Wick-Theorem

Zerlegung v. Fermion-Korrelation erfolgt analog zu bosonischer Formel, aber: f. jede Paarvertauschg. der Fermion a^+, a wird ein „$-$" aufgesammelt

Beispiel

$$\langle T\, a_3\, a_1^+\, a_2\, a_4^+ \rangle$$

$$= \langle T\, a_3\, a_1^+ \rangle \langle T\, a_2\, a_4^+ \rangle$$

$$- \langle T a_3 a_2 \rangle \langle T a_1^+ a_4^+ \rangle \longrightarrow 0$$

$$+ \langle T a_3 a_4^+ \rangle \langle T a_1^+ a_2 \rangle$$

$$= \overleftarrow{G}_{a_3 a_1}(t_3 - t_1)\, \overleftarrow{G}_{a_2 a_4}(t_2 - t_4) + \dots$$

Zeitgleiche Korrelationen

$$\langle T a_1^+(t_1)\, a_2(t_1) \rangle = f_{a_1} \delta_{a_1 a_2}$$

3. 2. 4. Fermionen und Bosonen simultan geordnet

$$\langle T\, a_1^+ a_2 a_3 \cdots \phi_\alpha\, a_4\, \phi_\beta \cdots \rangle = ?$$

$$= \langle T\, a_1^+ a_2 a_3 a_4 \cdots \rangle \langle T\, \phi_\alpha \phi_\beta \cdots \rangle$$

(3. Wicktheorem)

4. Vorstufe zur Diagrammanalyse: IBM

$$\langle q \hat{r} \rangle \propto \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!}\, T \int^t dt_1 \cdots \int^t dt_n\, \phi(t_1) \cdots \phi(t_n) \right\rangle$$

$$\phi = \sum_\alpha g_\alpha \left(b_\alpha^+ + b_\alpha \right)$$

4.1. Analyse und Aufsummierung d. Reihe

1. Feststellung: nur Terme mit geradzahligen ϕ tragen bei:

$$\text{Reihe} = sp_{pc} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{2n}}{(2n)!} \int^t dt_1 \cdots \int^t dt_{2n} \; T\left(\phi(t_1) \cdots \phi(t_{2n}) \right) \rho^0_{pc} \right)$$

$n = 0 \quad \longrightarrow \quad 1$

$$n = 1 \quad \longrightarrow \quad (-i)^2 \frac{1}{2!} \langle T \phi(t_1) \phi(t_2) \rangle = \frac{(-i)^2}{2!} \left(\cdots \right)$$

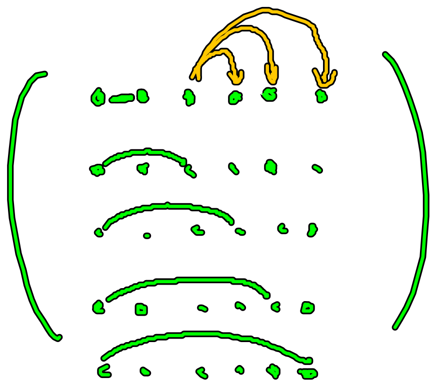
$$n = 2 \quad \longrightarrow \quad (-i)^4 \frac{1}{4!} \langle T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle =$$

$$= (-i)^4 \frac{1}{4!} \langle T \; \underset{1}{\bullet} \cdots \underset{2}{\bullet} \cdots \underset{3}{\bullet} \cdots \underset{4}{\bullet} \cdots \rangle$$

$$= (-i)^4 \frac{1}{4!}$$

$$= (-i)^4 \frac{1}{4!}\, 3\cdot(\text{- - -})^2 = (-i)^4 \frac{1}{2!}\left(\frac{\text{- - -}}{2}\right)^2$$

$n = 3 \longrightarrow$



Vorfaktor

$$= (-i)^6 \frac{1}{6!}\cdot 15\,(\text{- - -})^3$$

$5 = 6-1$ Mgl. f. 1.

$3 = 6-3$. Mgl. f. 3

$1 = 6-5$ Mgl. f. 2

$$= \frac{(-i)^6}{3!}\cdot\left(\frac{\text{- - -}}{2}\right)^3$$

<u>n beliebig</u>

$$\underbrace{(-i)^{2n}\frac{1}{(2n!)}\underbrace{\langle T\,\phi_1 \cdots \phi_n\rangle}_{\underbrace{(2n-1)(2n-3)\cdot(2n-5)\cdots 3\cdot 1}_{\frac{(2n)!}{n!\,2^n}}(\text{- - -})}}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{---}{2} \right)^n \rightarrow \text{Exp.-Reihe}$$

$$\langle q r \rangle = \vec{d}_{cv} \sigma_{cv}(0) e^{-i\omega_{cv} t} e^{-\frac{1}{2} \int^t dt_1 \int^t dt_2 D(t_1 - t_2)}$$

Dipoloszillator ist komplett d. Phononen Greensfunktion bekannt

4.2. Diskussion d. Modell unabhängiger Bosonen (IBM)

$$\langle q \vec{r} \rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stärke d. optischen Feld}}}{\sigma_{cv}(0)} \underbrace{e^{-i\omega_{cv} t}}_{\text{freie Bewegg.}} \exp\Big(\underbrace{i \sum_\alpha \frac{g_\alpha^2}{\omega_\alpha} t}_{\substack{\text{Frequenzverschiebg. d. Dipols} \\ \text{(Reorganisations-energie)}}} - \underbrace{\sum_\alpha \frac{g_\alpha^2}{\omega_\alpha^2} (1+n_\alpha)(1-e^{-i\omega_\alpha t})}_{\text{Phononemission}}$$

$$+ \underbrace{\sum_\alpha \frac{g_\alpha^2}{\omega_\alpha^2} n_\alpha (1 - e^{i\omega_\alpha t})}_{\text{Phononabsorption}} \Big)$$

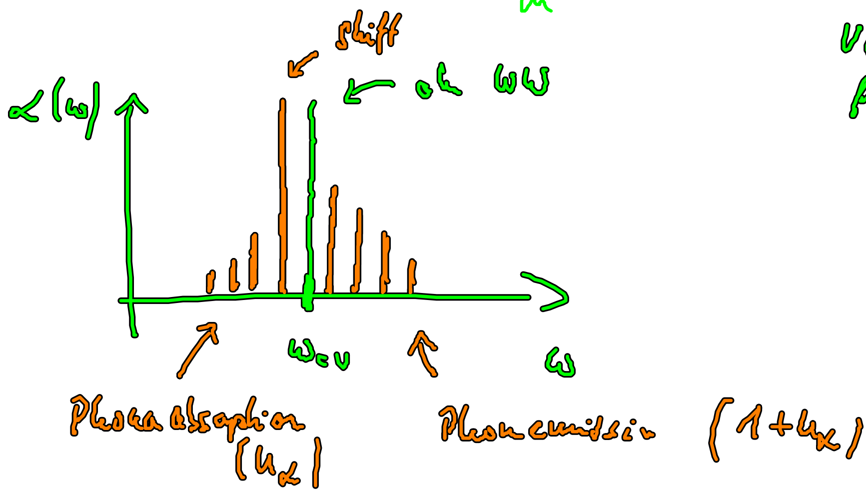
falls $e^{-e^{i\omega_\alpha t}}$ in eine Reihe entwickelt wird so

ein Mode

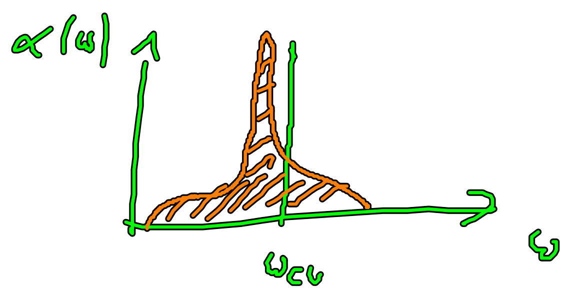
$$\langle q \hat{r} \rangle \propto \sum_m \frac{1}{m!} \cdots e^{-i m \omega_0 t}$$

Vielfachphononprozesse

f. $\alpha = 0$ (ein Mode)



viele Moden



Zeitverlauf