

English Summary:

1. Newtonian Mechanics :

Motion of mass points under the influences of forces
 \updownarrow
rigid bodies

1.1. Kinematics : position vector $\underline{r}(t) \in \mathbb{R}^3$
velocity vector $\underline{v}(t) \equiv \dot{\underline{r}}$
acceleration vector $\underline{a}(t) \equiv \ddot{\underline{r}}$

a) Cartesian coordinates $\underline{r}(t) = \sum_{j=1}^3 x_j(t) \underline{e}_j$

b) Natural coordinates : accompanying orthonormal basis (frame)
(curvilinear coord.) $(\hat{\underline{t}}, \hat{\underline{n}}, \hat{\underline{b}})$

parametrization of trajectory
 $\underline{r}(t)$ by arc length $s(t)$:

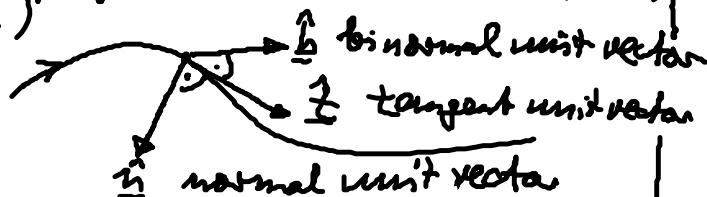
$$\begin{aligned} \hat{\underline{t}} &= \frac{d\underline{r}}{ds} \\ \hat{\underline{n}} &= \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{\underline{t}}}{ds} \\ \hat{\underline{b}} &= \hat{\underline{t}} \times \hat{\underline{n}} \end{aligned}$$

curvature $\kappa = \left| \frac{d\hat{\underline{t}}}{ds} \right|$, curvature radius $\tilde{\rho} = \frac{1}{\kappa}$

$$\underline{v} = v \hat{\underline{t}}$$

$$\underline{a} = \dot{v} \hat{\underline{t}} + \kappa v^2 \hat{\underline{n}}$$

tangential normal accel.

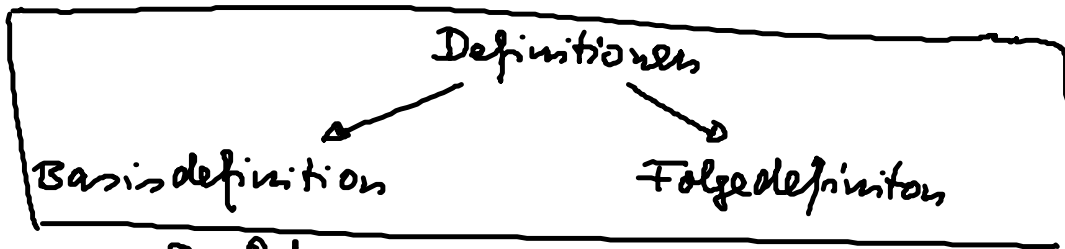


1.2 Newton'sche Axiome

Bisher : Kinematik

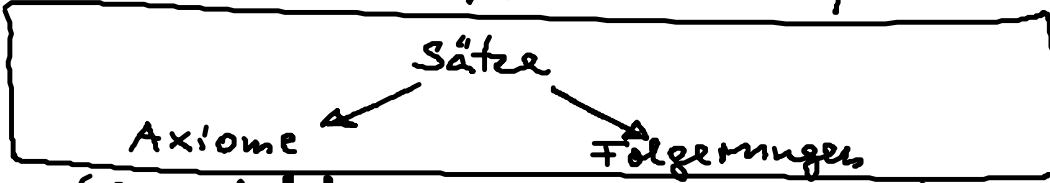
Jetzt : Dynamik (Kräfte als Ursache der Bewegung)

Struktur der Theorie (hier : Mechanik eines Massenpunktes)



z.B. Ort
Zeit
Masse
(durch Messvorschrift)

z.B. Geschwindigkeit
Beschleunigung
Impuls



(Grundannahmen-
Tatsachen)
z.B. Newton'sche Axiome

mathematisch beweisbar
aus Basisdef. + Axiomen
Postulate der Theorie

Grundgesetze der Dynamik:

2 neue Begriffe: Kraft (nur durch Wirkung)
definierbar

(träge) Masse

1. Newton'sches Axiom (Trägheitsgesetz):

Es gibt Koordinatensysteme (= Inertialsysteme),
in denen ein kräftefreier Massenpunkt im Zustand
der Ruhe oder geradlinig-gleichförmigen Bewegung verhält:
$$\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t$$

Gegenbeispiel: frei fallender Aufzug
Kartensell

Postulat (Basisdef.): Jeder Körper besitzt eine
skalare Eigenschaft "träge Masse m ", $m > 0$.

Definition: Impuls $\underline{p} := m \underline{v}$

2. Newton'sches Axiom (Bewegungsgesetz)

$$\text{Kraft } \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\dot{p}}} = \frac{d}{dt} (m \underline{v})$$

(gilt in Inertialsystemen)

Bemerkungen

(i) Falls m nicht zeitabhängig, gilt

$$\underline{\underline{F}} = m \underline{\underline{\ddot{r}}} = m \underline{\underline{a}}$$

dynam. Grundgl.

Diff. gl. $\xrightarrow{\text{Lösung}}$ Bahnkurve $\underline{r}(t)$

Grundaufgabe der Klass. Mechanik:

- Aufstellung der Bew. gl.
- Lösung der Diff. gl.
- Physikal. Interpretation der Lösung

(ii) Relativist. Mechanik : $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$
 m_0 Ruhmasse
 c Lichtgeschw. (geschwindigkeitsabh., somit zeitabh.)

$$\underline{\underline{F}} = \frac{d}{dt} (m \underline{v}) \quad \text{bleibt gültig}$$

$v \ll c$: $m \approx m_0$ klass. Grenzfall

(iii) zeitliche Änderung der Masse auch in der nichtrel. Mech. möglich, z.B. Rakete

(iii) Nur das Verhältnis $\frac{F}{m}$ ist durch das Axiom 2 definiert, Absolute Festlegung der Kraft durch willkürliche Wahl einer Einheit, z.B.

Einheit von m : 1 kg (Basisdef.)

\Rightarrow Einheit von F : 1 N = 1 $\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$ (Newton)

$$(\underline{\underline{F}} = m \underline{\underline{\ddot{r}}})$$

Basiseinheiten $\left. \begin{array}{l} [\underline{r}] = \text{m} \\ [\underline{m}] = \text{kg} \\ [\underline{t}] = \text{s} \end{array} \right\} \text{MKS-Einheiten}$

alternativ: $\left. \begin{array}{l} \text{cm} \\ \text{g} \\ \text{s} \end{array} \right\} \text{cgs-Einheiten}$

3. Newton'sches Axiom (actio - reactio)

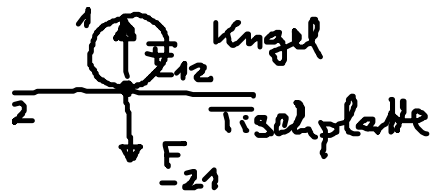
Sei \underline{F}_{-12} Kraft des Körpers 2 auf Körper 1,

\underline{F}_{-21} " " " 1 " " 2.

Dann:

$$\boxed{\underline{F}_{-12} = -\underline{F}_{-21}}$$

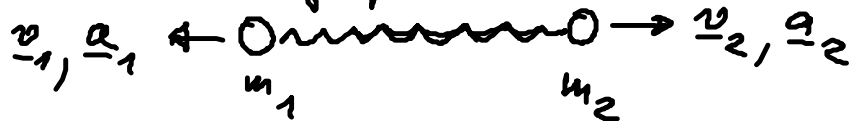
Beispiel



Anlage durch der Kugel: $\underline{F}_{-21} = -\underline{F}_{-12}$

Anwendung: Messung der trägen Masse

gespannte Feder



nach Durchtrennen der Feder: $m_1 \underline{a}_1 = -m_2 \underline{a}_2$
unabh. von \underline{F} !

4. Newton'sches Axiom (Superpositionsprinzip der Kräfte)

ungestörte Überlagerung von Kräften auf einen

Massenpkt. : $\underline{F} = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i$

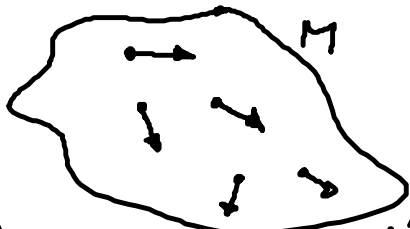
Anwendung: Kräfte durch Vektoren darstellbar
(Vektorrechnung, lin. Vektorraum)



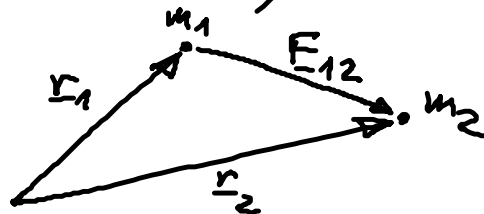
Darstellung von Kräften durch Kraftfelder $\underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$

allg. Vektorfeld $\underline{A}(\underline{r})$

math. Schreibweise $\underline{A} : M \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $\underline{r} \mapsto \underline{A}(\underline{r})$

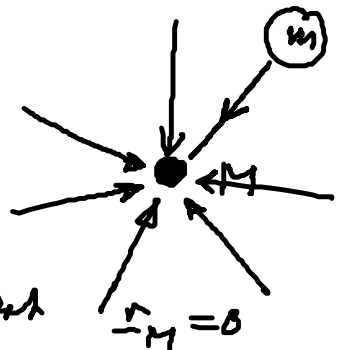


z. B. Gravitationskraft $\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} (\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$
 (γ Gravitationskonstante)



Darstellung durch Gravitationsfeld

$\underline{F}(\underline{r}) = -\gamma \frac{Mm}{r^3} \underline{r}$ Zentralfeld



Kraft, die die Masse M am Ort $\underline{r}_M = 0$ auf beliebige Masse m am Ort \underline{r} ausübt

Bem.:

(i) Kraftfelder erlauben Fernwirkungskräfte

(ii) Kraft kann auch von $\dot{\underline{r}}$ abhängen, z.B.

Lorentzkraft auf ein im Magnetfeld
 bewegtes geladenes Teilchen $\underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}) = q \dot{\underline{r}} \times \underline{B}(\underline{r}, t)$

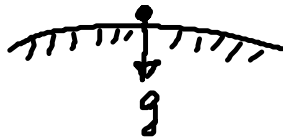
mag. Induktion

oder Reibungskraft $\underline{F} = -\alpha \underline{v}$

Äquivalenz von träge und schwere Masse

Gravitationskraft der Erde auf der Erdoberfläche:

$$\underline{F} = m_s \underline{g} \quad (\text{Schwerkraft, Gewichtskraft})$$

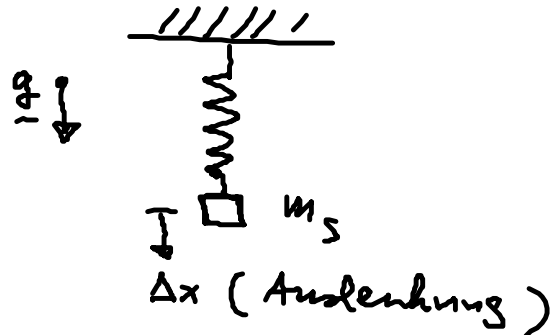


$$\underline{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$g = 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \approx \text{const.}$$

Erdbeschleunigung

m_s = schwere Masse (Materialeigenschaft, messbar durch Federwaage)



Exp. Grunderfahrung:

$m_s \sim m$ (träge Masse) für alle Körper

(m : Beschleunigung $\underline{F} = m \underline{a}$ beim freien Fall im Schwerfeld)

m_s : Gewichtskraft $\underline{F} = m_s \underline{g}$

Setze daher

$$\boxed{m_s = m \text{ (träge)}}$$

(Einsteins Äquivalenzprinzip)

→ Grundlage der allg. Relativitätstheorie