English Summary:

1.3 Work and conservative forces

Work $W \equiv -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} = V(\underline{r}_2) - V(\underline{r}_1)$

conservative force

Power $P \equiv \frac{dW}{dt} = \underline{F} \cdot \dot{\underline{r}}$ $\qquad \underline{F}(\underline{r}) = -\operatorname{grad} V(\underline{r})$, potential $V(\underline{r})$

$\Leftrightarrow \operatorname{rot} \underline{F} = 0$

$\Leftrightarrow \oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$

Energy conservation: $T + V = \boxed{\frac{m}{2}\dot{\underline{r}}^2 + V(\underline{r}) = E} = \text{const.}$

(first integral of equations of motion)

1.4 Harmonische Schwingungen

Schwingung (Oszillation)

periodisch

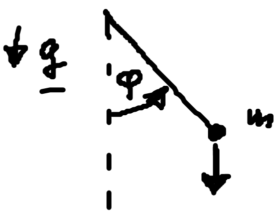
$f(t) = f(t+T) \;\forall t$

(T Periodendauer
$\nu = \frac{1}{T}$ Frequenz
$\omega = 2\pi\nu$ Kreisfrequ.)

harmonisch

$f(t) \sim \sin(\omega t - \varphi)$

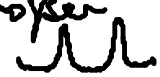
lineare Osz.
(lineares Kraftgesetz)
z.B. Fadenpendel bei kleiner Auslenk.



anharmonisch

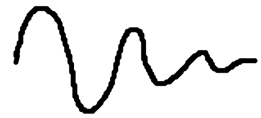
z.B. Kippschwing (Sägezahn)

nichtlineare Osz.
(nichtlin. Kraftges.)
z.B. elektr. Stromkreis
(Relaxationsosz.)
neuronale Systeme
Pendel bei großer Auslenkung



nichtperiodisch

(a) gedämpft

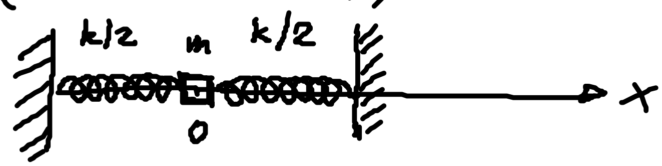


(b) quasiperiod.
(Überlagerung mehrerer Frequ. ν_i mit $\nu_i/\nu_j \notin \mathbb{Q}$)

(c) chaotisch
(Überlagerung eines kontin. Frequenzbandes, empfindl. Abhängigkeit von Anfangsbed.)
z.B. getriebenes Pendel mit Überschlag

Harmonisch Oszillator:

Schwingung einer Masse m an elast. Feder mit Federkonst k
(1-dimensional)



Hooke'sches Gesetz: Rückstellkraft $F = -kx$, $k > 0$

Beweg.gl. $m\ddot{x} = -kx$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad \text{mit} \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{Eigenfrequenz}$$

lin. Dgl. 2. Ordn. mit konst. Koeff.

Lösungsansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \lambda^2 x + \omega_0^2 x = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \pm i\omega_0$ mit <u>Eigenfrequ.</u> ω_0

$(\omega_0 = 2\pi\nu_0)$

Allg. Lösung:

lineare Superposition (wegen Linearität des Kraftgesetzes)
$\Rightarrow$ lin. Dgl.

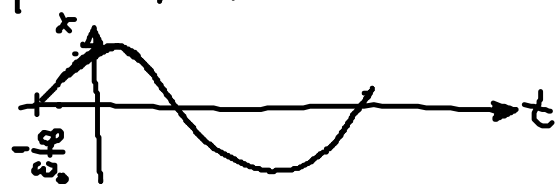
$$\boxed{x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$c_2 = c_1^* \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

- Parametrisierung durch Amplitude $A \in \mathbb{R}_+$ und Phase mit Phasenverschiebung $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\boxed{x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)}$$



- Festlegung von A, φ durch Anfangsbed. $x(t=0)$, $\dot{x}(t=0)$ (Dgl. 2. Ordn.)

- Darstellung der Oszillation im Phasenporträt:

Mit $y := \dot{x} = \frac{p}{m}$ lässt sich die Schwingungsgl. als dynamisches System

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x \end{aligned}}$$

schreiben.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

2-dim. Vektorfeld

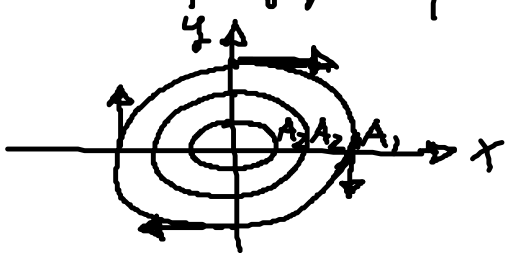
Die Menge aller Lösung $(x(t), y(t))$ lässt sich geometrisch in der (x,y)-Phasenebene veranschaulichen.

Trajektorien (Bahnkurven)

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix}$$

konzentrische Ellipsen!

Für feste Energie ($\hat{=}$ Amplitude A) legt die Phase φ den Anfangspkt. fest.



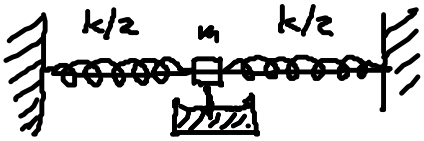
Phasenporträt

allg.: periodische Lösungen $\hat{=}$ geschlossene Kurven
(nicht notwendig harmonisch)

s.Ü.: math. Pendel (nichtlin. Osz.)

gedämpfte harmon. Schwingungen

In realen Syst.: Energiedissipation durch Reibungsverluste etc.



$\Rightarrow$ Dämpfung der Schwing.

Beispiel: lineare Reibungskraft $-\beta\dot{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

mit $\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$

"Güte" $Q := \frac{m\omega_0}{\beta}$ (Quality factor)

Lösungsansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow$ charakt. Gl. $\lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q}\lambda + \omega_0^2 = 0$

mit den Wurzeln

$$\boxed{\lambda_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2}}$$

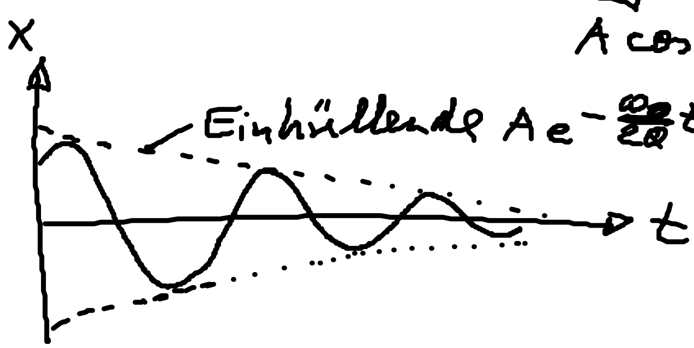
Fallunterscheidung

(i) $Q > \frac{1}{2}$ (schwache Dämpfung)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\underbrace{\left[c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right]}_{A\cos(\omega t + \varphi)}$$

mit $\omega := \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}$



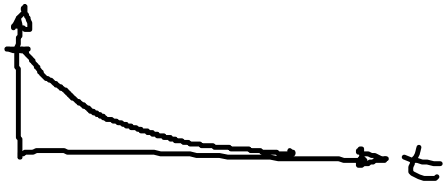
gedämpfte Schwingung

mit verminderter Frequenz

(ii) $\underline{Q < \frac{1}{2}}$ (überdämpfter Fall)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right) < 0$$

$$x(t) = c_1 e^{-|\lambda_1| t} + c_2 e^{-|\lambda_2| t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$



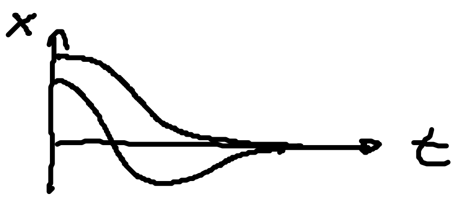
monotones expon. Abklingen

(Kriechfall)

(iii) $\underline{Q = \frac{1}{2}}$ (kritische Dämpfung)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_0$$

$$x(t) = a e^{-\omega_0 t} + b t e^{-\omega_0 t}$$

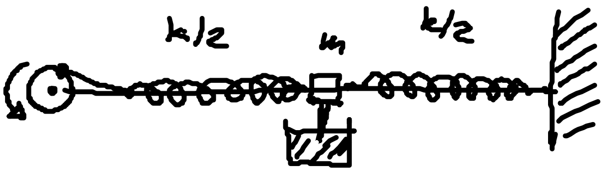


aperiod. Grenzfall

hängt stark von den Anfangsbed. ab!

1.5 Erzwungene Schwingungen

gedämpfter harmon. Osz. mit äußerer period. Kraft:



$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + K_0 \cos\omega t$$

komplex:

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = k_0 e^{i\omega t}} \qquad k_0 = \frac{K_0}{m}$$

Ansatz: $x(t) = x_0 e^{i\omega t} \quad \in \mathbb{C}$

$$-\omega^2 x_0 + i\omega\frac{\omega_0}{Q}x_0 + \omega_0^2 x_0 = k_0$$

Bestimmungsgl. für komplexe Amplitude x_0:

k_0

$$x_0 = \frac{\quad}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q}} \, .$$

Zerlegung einer komplexen Zahl nach Betrag u. Phase:

$$z \in \mathbb{C} : \quad z = \alpha + i\beta = r e^{i\varphi} \qquad r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$$

Also

$$x_0 = \overbrace{\frac{k_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{\omega_0^2}{Q^2}}}}^{\text{reelle Ampl. } A(\omega) \in \mathbb{R}} \exp\{ i \underbrace{\varphi(\omega)}_{\text{Phase } \varphi = \arctan \frac{-\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}} \}$$

Allg. Lösung der inhom. Dgl.:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{A(\omega) e^{i(\omega t + \varphi(\omega))}}_{\text{spez. Lösung der inhom. Dgl. (partikuläres Integral)}} + \underbrace{A_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\, t + \varphi_0\right)}_{\text{allg. Lös. der hom. Dgl. } (Q > \frac{1}{2})}}$$

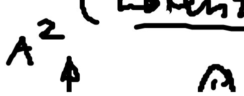
spez. Lösung der inhom. Dgl. (partikuläres Integral)

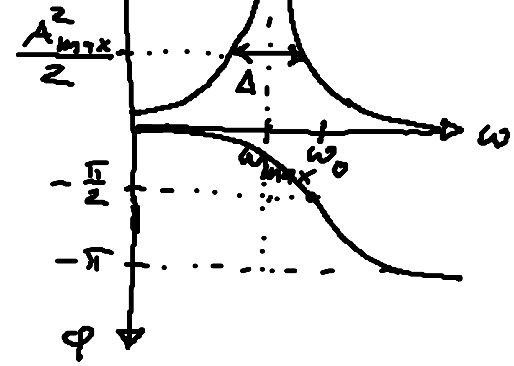
allg. Lös. der hom. Dgl. $(Q > \frac{1}{2})$ beschreibt Einschwingvorgang, da exponentiell gedämpft (Erfüllung der Anf. bed. durch Konst. A_0, φ_0)

Disk. der spez. inhom. Lös.:

Resonanzkurve (Lorentzkurve)

$$[A(\omega)]^2 = \frac{k_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \frac{\omega_0^2}{Q^2}}$$





$$\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$$

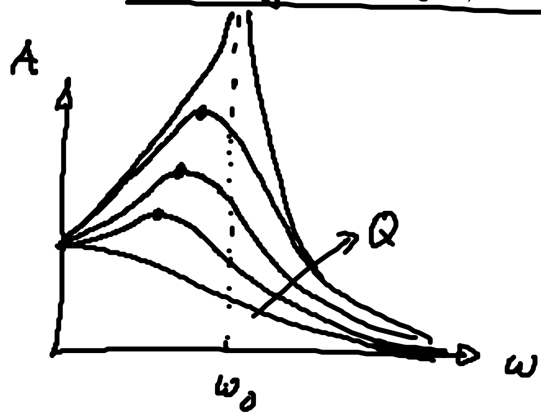
__Breite der Resonanz__ (bzgl. A^2)

FWHM = full width at half maximum Δ

$$\Delta = \Delta_+ + \Delta_- \quad \text{(asymm.!)}$$

$$A(\omega_{max} \pm \Delta_\pm) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\left[A(\omega_{max})\right]^2$$

__Näherung für große Güte $Q \gg 1$__ (schwache Dämpfung):

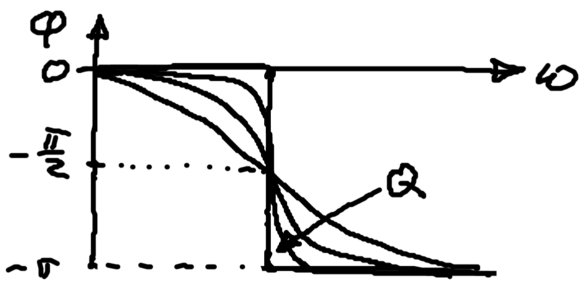


$$\boxed{\Delta = \Delta_+ + \Delta_- \approx \frac{\omega_0}{Q}}$$

Resonanzbreite umso kleiner, je größer Q

$$\boxed{\omega_{max} \approx \omega_0}$$

$Q \to \infty$: $A_{max} \to \infty$ __Resonanzkatastrophe__



__Phasenverschiebung!__