English Summary:

## 1.3 Work and conservative forces

Work $W \equiv -\int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F} \cdot d\underline{r} \quad = \quad V(\underline{r}_2) - V(\underline{r}_1)$

$\uparrow$ conservative force

Power $P \equiv \frac{dW}{dt} = \underline{F} \cdot \dot{\underline{r}}$ $\qquad$ $\underline{F}(\underline{r}) = -\operatorname{grad} V(\underline{r})$, potential $V(\underline{r})$

$\Leftrightarrow \operatorname{rot} \underline{F} = 0$

$\Leftrightarrow \oint \underline{F} \cdot d\underline{r} = 0$

Energy conservation: $T + V = \boxed{\frac{m}{2} \dot{\underline{r}}^2 + V(\underline{r}) = E} = \text{const.}$

(first integral of equations of motion)

## 1.4 Harmonische Schwingungen

# Schwingung (Oszillation).

## periodisch

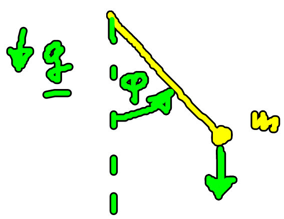
$f(t) = f(t+T) \ \forall t$

($T$ Periodendauer
$\nu = \frac{1}{T}$ Frequenz
$\omega = 2\pi\nu$ Kreisfrequ.)

### harmonisch

$f(t) \sim \sin(\omega t - \varphi)$

lineare Osz.
(linearer Kraftgesetz)
z.B. Fadenpendel bei kleiner Auslenk.

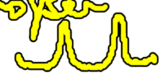




### anharmonisch

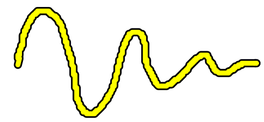
z.B. Kippschwing (Sägezahn)

nichtlineare Osz.
(nichtlin. Kraftges.)
z.B. elektr. Stromkreis (Relaxationsosz.)
neuronale Systeme
Pendel bei großer Auslenkung



## nichtperiodisch

(a) gedämpft

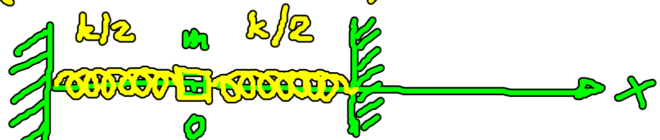


(b) quasiperiod.
(Überlagerung mehrerer Frequ. $\nu_i$ mit $\nu_i/\nu_j \notin \mathbb{Q}$)

(c) chaotisch
(Überlagerung eines kontin. Frequenzbandes, empfindl. Abhängigkeit von Anfangsbed.)
z.B. getriebenes Pendel mit Überschlag

# Harmonisch Oszillator:

Schwingung einer Masse $m$ an elast. Feder mit Federkonst $k$ (1-dimensional)





Hooke'sches Gesetz: Rückstellkraft $F = -kx$, $k > 0$

Beweg.gl. $m\ddot{x} = -kx$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad \text{mit } \omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ Eigenfrequenz}$$

lin. Dgl. 2. Ordn. mit konst. Koeff.

Lösungsansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \lambda^2 x + \omega_0^2 x = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = \pm i\omega_0$ mit Eigenfrequ. $\omega_0$

$(\omega_0 = 2\pi\nu_0)$

**Allg. Lösung:**

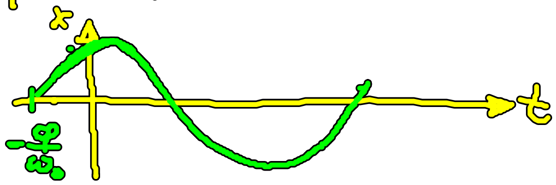
lineare Superposition $\boxed{x(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}}$

(wegen Linearität des Kraftgesetzes) $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ lin. Dgl. $c_2 = c_1^* \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

- Parametrisierung durch Amplitude $A \in \mathbb{R}_+$ und Phase mit Phasenverschiebung $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\boxed{x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)}$$




- Festlegung von $A, \varphi$ durch Anfangsbed. $x(t=0), \dot{x}(t=0)$ (Dgl. 2. Ordn.)

- Darstellung der Oszillation im Phasenportrait:

Mit $y := \dot{x} = \frac{p}{m}$ lässt sich die Schwingungsgl. als dynamisches System

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x \end{aligned}}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

2-dim. Vektorfeld

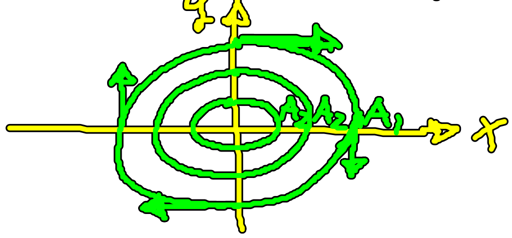
schreiben.

Die Menge aller Lösung $(x(t), y(t))$ lässt sich geometrisch in der $(x,y)$-Phasenebene veranschaulichen:

Trajektorien (Bahnkurven) $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t + \varphi) \\ -\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix}$

konzentrische Ellipsen!

Für feste Energie ($\hat{=}$ Amplitude $A$) legt die Phase $\varphi$ den Anfangspkt. fest.



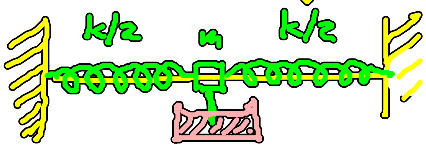

Phasenportrait

allg.: periodische Lösungen ≙ geschlossene Kurven (nicht notwendig harmonisch)

s.Ü.: math. Pendel (nichtlin. Osz.)

## Gedämpfte harmon. Schwingungen

In realen Syst.: Energiedissipation durch Reibungsverluste etc.




$\Rightarrow$ Dämpfung der Schwing.

Beispiel: lineare Reibungskraft $-\beta\dot{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

mit $\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$

"Güte" $Q := \frac{m\omega_0}{\beta}$ (Quality factor)

Lösungsansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

$\Rightarrow$ charakt. Gl. $\lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q}\lambda + \omega_0^2 = 0$

mit den Wurzeln

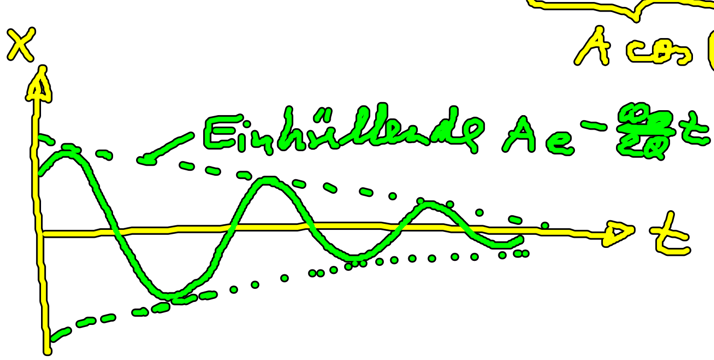
$$\boxed{\lambda_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{4Q^2} - \omega_0^2}}$$

Fallunterscheidung

(i) $Q > \frac{1}{2}$ (schwache Dämpfung)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\underbrace{\left[c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right]}_{A\cos(\omega t + \varphi)} \quad \text{mit } \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{(2Q)^2}}$$

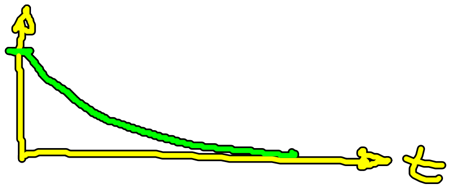



gedämpfte Schwingung mit verminderter Frequenz

(ii) $\underline{Q < \frac{1}{2}}$ (überdämpfter Fall)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right) < 0$$

$$x(t) = c_1 e^{-|\lambda_1|t} + c_2 e^{-|\lambda_2|t} \quad , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$



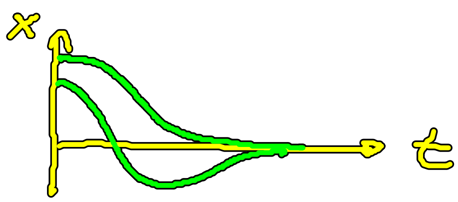

**monotones expon. Abklingen**

(Kriechfall)

(iii) $\underline{Q = \frac{1}{2}}$ (kritische Dämpfung)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_0$$

$$x(t) = a e^{-\omega_0 t} + b t e^{-\omega_0 t}$$

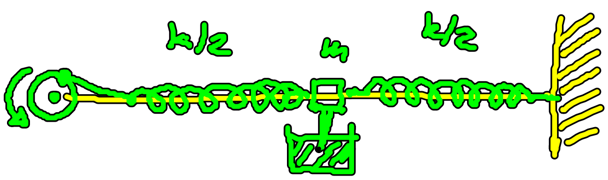



**aperiod. Grenzfall**

hängt stark von den Anfangsbed. ab.!

## 1.5 Erzwungene Schwingungen

gedämpfter harmon. Osz. mit äußerer period. Kraft:




$$m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x} + K_0 \cos\omega t$$

komplex:

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = k_0 e^{i\omega t}} \qquad k_0 = \frac{K_0}{m}$$

Ansatz: $x(t) = x_0 e^{i\omega t} \in \mathbb{C}$

$$-\omega^2 x_0 + i\omega\frac{\omega_0}{Q}x_0 + \omega_0^2 x_0 = k_0$$

Bestimmungsgl. für komplexe Amplitude $x_0$:

$k_0$

$$x_0 = \frac{\quad}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega \frac{\omega_0}{Q}} .$$

Zerlegung einer komplexen Zahl nach Betrag u. Phase:

$$z \in \mathbb{C}: \quad z = \alpha + i\beta = r e^{i\varphi} \qquad r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$$

Also

$$x_0 = \overbrace{\frac{k_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2 \frac{\omega_0^2}{Q^2}}}}^{\text{reelle Ampl. } A(\omega) \in \mathbb{R}} \exp\{i\underbrace{\varphi(\omega)}\}$$

Phase $\varphi = \arctan \frac{-\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2-\omega^2)}$

Allg. Lösung der inhom. Dgl.:

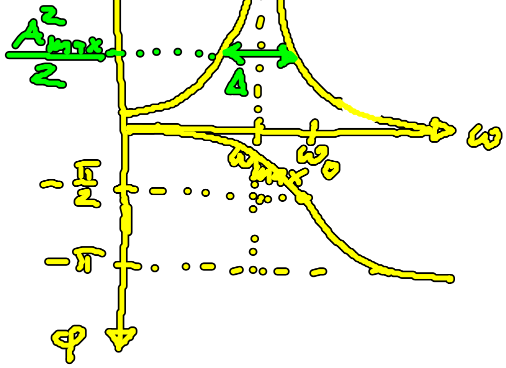
$$\boxed{x(t) = \underbrace{A(\omega) e^{i(\omega t + \varphi(\omega))}}_{\substack{\text{spez. Lösung der}\\ \text{inhom. Dgl.}\\ \text{(partikuläres Integral)}}} + \underbrace{A_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,t + \varphi_0\right)}_{\text{allg. Lös. der hom. Dgl. } (Q > \frac{1}{2})}}$$

beschreibt Einschwingvorgang, da exponentiell gedämpft (Erfüllung der Anf. bed. durch Konst. $A_0$, $\varphi_0$)

Disk. der spez. inhom. Lös.:

Resonanzkurve (Lorentzkurve)

$$[A(\omega)]^2 = \frac{k_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2 \frac{\omega_0^2}{Q^2}}$$




$$\omega_{max} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0$$

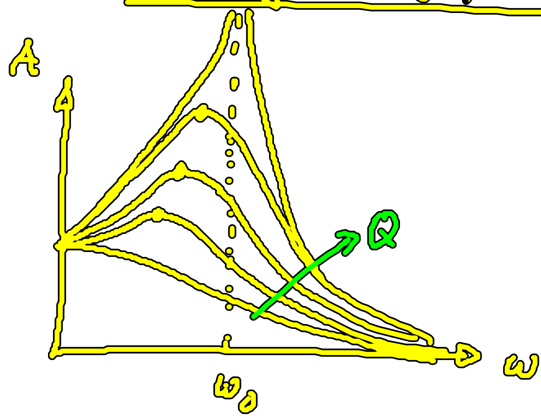
<u>Breite der Resonanz</u> (bzgl. $A^2$)

FWHM = full width at half maximum $\Delta$

$\Delta = \Delta_+ + \Delta_-$ (asymm.!)

$$A(\omega_{max} \pm \Delta_\pm) \overset{!}{=} \frac{1}{2}[A(\omega_{max})]^2$$

<u>Näherung für große Güte $Q \gg 1$</u> (schwache Dämpfung):

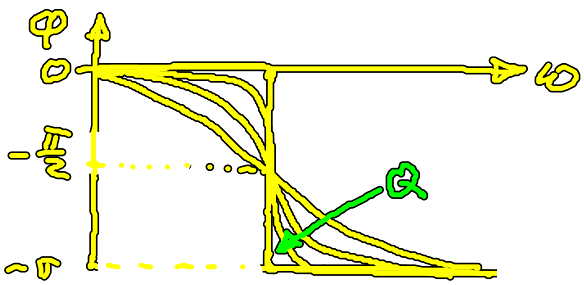



$$\boxed{\Delta = \Delta_+ + \Delta_- \approx \frac{\omega_0}{Q}}$$

Resonanzbreite umso kleiner, je größer Q

$$\boxed{\omega_{max} \approx \omega_0}$$

$Q \to \infty$ : $A_{max} \to \infty$ <u>Resonanzkatastrophe</u>




<u>Phasenverschiebung</u>!