

## English Summary:

### 1.5 Central forces and conservation of angular momentum

angular momentum  $\underline{L} \equiv \underline{r} \times \underline{p}$   
torque  $\underline{M} \equiv \underline{r} \times \underline{F} \Rightarrow \frac{d}{dt} \underline{L} = \underline{M}$

Conservation of angular momentum:  $\frac{d}{dt} \underline{L} = 0 \Leftrightarrow \underline{M} = 0$

for conservative force:  $\Leftrightarrow$  central force  $\underline{F}(\underline{r}) = f(r) \underline{e}_r$

$\Leftrightarrow$  rotationally invariant potential  $V(\underline{r}) = V(|\underline{r}|)$

For central forces:

Theorem 1: motion in plane  $\perp \underline{L}$



Theorem 2 (Kepler's 2nd law): The radius vector sweeps out equal areas in equal times

Integration of eqs. of motion for conservative central forces:

• angular momentum conservation:  $L = mr^2 \dot{\varphi}$

• energy conservation:  $E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{V_{\text{eff}}(r)} + V(r) \Rightarrow r(t)$

$V_{\text{eff}}(r)$  eff. radial potential

### 1.7 Planetenbewegung (Kepler'sche Gesetze)

Bewegung im Zentralfeld  $V(r)$ :

$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad \begin{array}{l} \text{Energieerhaltungssatz} \\ = 1. \text{ Integral} \end{array}$$

Betrachte nun speziell Gravitationspot.

$$V(r) = -\gamma \frac{mM}{r} \quad \gamma \text{ Gravitationskonstante}$$

$M = \text{Sonnenmasse}$

Effektives Radialpot.

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \quad k := \gamma m M > 0$$

$$r \rightarrow 0 : V_{\text{eff}}(r) \sim \frac{L^2}{2mr^2} \rightarrow \infty$$

$$r \rightarrow \infty : V_{\text{eff}}(r) \sim -\frac{k}{r} \rightarrow 0$$

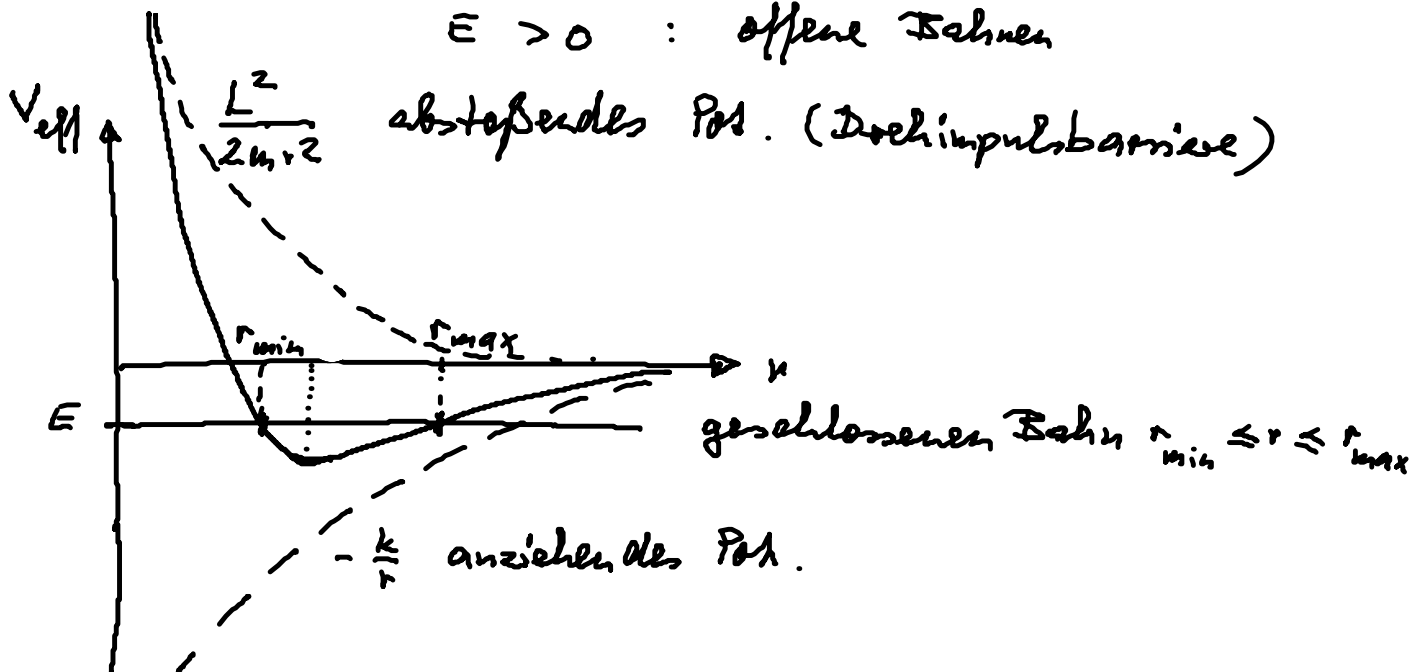
$$\text{Minimum} : \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{2L^2}{2mr^3} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow r_0 = \frac{L^2}{mk}$$

$$V_{\text{eff}}(r_0) = -\frac{mk^2}{2L^2}$$

Wegen  $\frac{m}{2} \dot{r}^2 = E - V_{\text{eff}}(r)$  ist eine Bewegung nur für  $V_{\text{eff}}(r) \leq E$ , also auch nur für  $E > V_{\text{eff}}(r_0)$

$-\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0$  : geschlossene Bahnen

$E > 0$  : offene Bahnen



Für  $-\frac{mk^2}{2L^2} < E < 0$  sind die beiden Umkehrpunkte durch

$$V_{\text{eff}}(r) = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \stackrel{!}{=} E \quad (E < 0)$$

$$\text{bestimmt : } \Leftrightarrow |E|r^2 - kr + \frac{L^2}{2m} = 0$$

$$r_{\text{min/max}} = \frac{1}{2|E|} \left( k \mp \sqrt{k^2 - 2L^2|E|} \right)$$

Für  $E > 0$  ergibt sich 1 innerer Umkehrpunkt :

$$Er^2 + kr - \frac{L^2}{2m} = 0$$

$$r_{\text{min}} = \frac{1}{2E} \left( -k \left( \mp \right) \sqrt{k^2 + \frac{2L^2E}{m}} \right)$$

(nur 1 Lösung  $r > 0$  !)

$\Rightarrow$  Bahn ist offen

Bahngleichung:

Drehimpulserhaltungssatz  $L = m r^2 \dot{\varphi} \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2}$

+ Energieerhaltungssatz  $\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}$  ergibt

durch Division: Elimination der Zeit

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{L}{m r^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}} = \frac{1}{r^2 \sqrt{\frac{2m}{L^2} (E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2m r^2})}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi' = \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2 \sqrt{\frac{2m}{L^2} (E + \frac{k}{r'} - \frac{L^2}{2m r'^2})}}$$

quadrat. Ergänzung

$$\frac{2mE}{L^2} + \frac{2mk}{L^2 r'} - \frac{1}{r'^2} = - \left( \frac{1}{r'} - \frac{mk}{L^2} \right)^2 + \frac{m^2 k^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$$

$$= D \left[ 1 - \frac{1}{D} \left( \frac{1}{r'} - \frac{mk}{L^2} \right)^2 \right]$$

$$\text{mit } D := \frac{m^2 k^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2} = \frac{2m}{L^2} \left( \frac{mk^2}{2L^2} + E \right) > 0$$

$$\underbrace{-V_{\text{eff}}(r_0)}$$

$> 0$  (klass. erlaubt)

Substitution:

$$\cos \alpha' = \frac{1}{\sqrt{D}} \left( \frac{1}{r'} - \frac{mk}{L^2} \right)$$

$$- \sin \alpha' d\alpha' = - \frac{dr'}{\sqrt{D} r'^2}$$

$$\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr' \sin \alpha'}{\sin \alpha'} \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha'}} = \int_{r_0}^r dr' = r - r_0$$

$$= \arccos \left[ \frac{1}{\sqrt{D}} \left( \frac{1}{r} - \frac{mk}{L^2} \right) \right] - \arccos \left[ \frac{1}{\sqrt{D}} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{mk}{L^2} \right) \right]$$

über eine der beiden Int.konst.  $\varphi_0, r_0$  kann frei verfügt werden (willkür. Wahl des Winkels).

Mit der Wahl

$$\varphi_0 = \arccos \left[ \frac{1}{\sqrt{D}} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{mk}{L^2} \right) \right]$$

ergibt sich

$$\varphi(r) = \arccos \left[ \frac{1}{\sqrt{D}} \left( \frac{1}{r} - \frac{mk}{L^2} \right) \right]$$

$$\sqrt{D} \cos \varphi = \frac{1}{r} - \frac{mk}{L^2}$$

$$\frac{1}{r(\varphi)} = \frac{mk}{L^2} + \sqrt{D} \cos \varphi = \frac{mk}{L^2} (1 + \epsilon \cos \varphi)$$

$$\boxed{r(\varphi) = \frac{L^2 / (mk)}{1 + \epsilon \cos \varphi}} \quad \text{mit } \epsilon := \sqrt{D} \frac{L^2}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$$

Gleichung eines allg. Kegelschnittes in Polarkoord.:

$\epsilon > 1 \triangleq \epsilon > 0$  Hyperbel (offene Bahn)

$\epsilon = 1 \triangleq \epsilon = 0$  Parabel ( " )

$\epsilon < 1 \triangleq -\frac{mk^2}{2L^2} < \epsilon < 0$  Ellipse (geschlossene Bahn)

$\epsilon$  heißt numerische Exzentrizität.

Ellipse ( $\epsilon < 1$ ):

Umrechnung auf kartes. Koord. durch

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$p := \frac{L^2}{mk}, \quad \text{Halbachsen } a := \frac{p}{1 - \epsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$$

$$\text{Exzentrizität } \epsilon := \frac{ea}{1 - \epsilon^2} = \frac{pe}{1 - \epsilon^2}$$

$$\text{Ellipsengl. } r + \underbrace{\epsilon r \cos \varphi}_x = p$$

$$\Leftrightarrow r = p - \epsilon x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2 = (p - \epsilon x)^2.$$

$$\Leftrightarrow x^2(1-\epsilon^2) + 2\epsilon px + y^2 = p^2$$

quadrat. Ergänzung

$$(1-\epsilon^2)(x+e)^2 + y^2 = p^2 \frac{1}{1-\epsilon^2} \quad | : \frac{p^2}{1-\epsilon^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

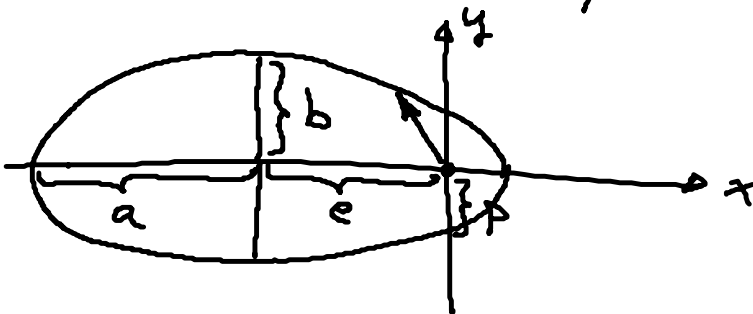
$$\epsilon = \sqrt{1 - \frac{2|E|p}{k}}$$

↓

Ellipse mit großer Halbachse  $a = \frac{p}{1-\epsilon^2} = \frac{k}{2|E|}$

kleine Halbachse  $b = \frac{p}{\sqrt{1-\epsilon^2}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}}$

Verschiebung um  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$  (Exzentrizität),  
so dass 1 Brennpunkt im Ursprung liegt



$$\epsilon = \frac{e}{a}$$

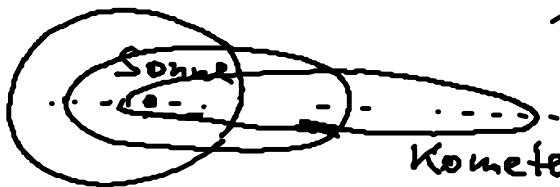
Energie  $E$  legt große Halbachse fest:  $a = \frac{k}{2|E|}$   
Drehimpuls  $L$  legt  $p = \frac{L^2}{mk}$  und damit die  
kleine Halbachse ( $b^2 = ap$ ) und Exzentrizität  
( $e^2 = a^2 - ap$ ) fest.

Je kleiner der Drehimpuls  $L$ , desto kleiner  $p$   
und damit umso exzentrischer ist die Ellipse.

Max. Drehimpuls bei geg. Energie  $E < 0$ :

$$L^2 = \frac{mk^2}{2|E|} \Rightarrow p = a \Rightarrow b = a \Rightarrow \epsilon = 0$$

Kreisbahn  $r(\varphi) = p = \text{const}$



Kometenbahn (z.B. Boyy-Hale)

## Satellitenbahn um die Erde: $E < 0$

$L$  muss groß genug sein, so dass  $v \geq R$  (Erdradius)

$\Rightarrow$  Mindestgeschwind.  $v_1 \parallel$  Erdoberfläche

$$v_1 = 7.9 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (\text{1. kosm. Geschw.})$$

Fluchtgeschw. von der Erde:  $E = 0$

$$\text{Auf der Erdoberfl. } mg = \gamma \frac{mM}{R^2}$$

$$\Rightarrow 0 = E = \frac{m}{2} v_2^2 - \underbrace{\gamma \frac{mM}{R}}_{mgR}$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2gR} = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad (\text{2. kosm. Geschw.})$$

## Kepler'sche Gesetze

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht

(folgt aus Energie- u. Drehimpulserh.)

2. Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Flächensatz)



$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} |L| = \text{const} \quad (\text{\S 1.6})$$

3.  $T^2 \sim a^3$  ( $T$  Umlaufzeit,  $a$  große Halbachse)

Beweis: Ellipsenfläche  $S = \pi ab$  (1)

$$\text{Flächensatz } \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const.}$$

$$\Rightarrow S = \int_0^T \frac{dS}{dt} dt = \frac{L}{2m} T \quad (2)$$

$$\frac{b^2}{a} = \frac{L^2 / (2m|E|)}{k / (2|E|)} = \frac{L^2}{mk} = b = \frac{L}{\sqrt{mk}} \sqrt{a}$$

$$(1) = (2)$$
$$\Rightarrow T = \frac{2\pi m a b}{L} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} a^{3/2} = \frac{2\pi}{\sqrt{gH}} a^{3/2}$$

unabl. von der Planetenmasse  $m$

NB: Mitbewegung der Sonne vernachlässigt!