2.1.3 D'Alembert's principle of virtual work

$$\delta W = \sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{X}_i)\,\delta \underline{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{e}_i\, \delta \underline{r}_i = 0 \qquad \underline{X} \to K_j,\ \underline{r} \to x_j,\ \underline{a} \to \phi_j^{\mu}$$

Lagrange's equations of 1st kind: $m_j \ddot{x}_j - K_j - \sum_{\mu=1}^{\hat{\Lambda}} \lambda_\mu(t)\, \phi_j^{\mu} = 0$

2.1.4 Generalized coordinates

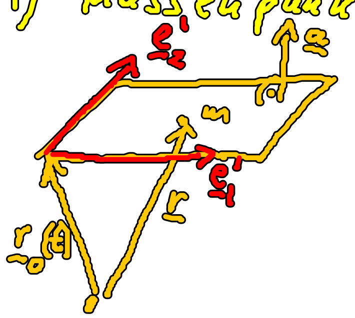
$\{q_i\} = \{q_1, \dots, q_f\}$, $f = 3N - \Lambda$ (# degrees of freedom)

Fortsetzung von 2.1.4

Die $\{q_1, \dots, q_f\}$ sind frei variierbar!

Zwangsbedingungen sind identisch erfüllt $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$

Bsp.: 1) Massenpunkt m auf der bewegten Ebene $\underline{a} \cdot (\underline{r} - \underline{r}_0(t)) = 0$



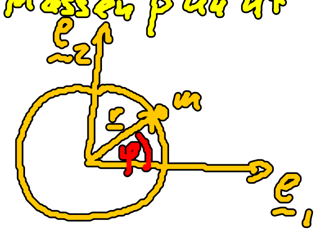
Mitbewegtes hartes Koordinatensystem $\underline{e}_1', \underline{e}_2'$

$$\underline{r} = \underline{r}_0(t) + q_1 \underline{e}_1' + q_2 \underline{e}_2'$$

$\Rightarrow$ generalisierte Koordinaten $\{q_1, q_2\}$

$(f = 2)$

2) Massenpunkt m auf Kreis mit Radius R



$|\underline{r}| = R \qquad \underline{r} = R(\cos\varphi\, \underline{e}_1 + \sin\varphi\, \underline{e}_2)$

$\Rightarrow \quad q = \varphi \qquad (f = 1)$

Virtuelle Verrückungen $\delta \underline{r}_i$ durch $\delta q_1, \dots, \delta q_f$ ausgedrückt:

$$\underline{r}_i(q_1,\dots,q_f,t) \overset{\delta t=0}{\Longrightarrow} \delta \underline{r}_i = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\underline{r}_i\right)\delta q_j \qquad (1)$$

Vgl. reale Verrückungen: $\underline{v}_i = \frac{d}{dt}\underline{r}_i = \sum_{j=1}^{f} \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\underline{r}_i\right)\dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t}\underline{r}_i \qquad (2)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\underline{v}_i(q_1,\dots,q_f,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_f,t) = \frac{\partial}{\partial q_j}\underline{r}_i(q_1,\dots,q_f,t) \qquad (3)$$

Virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte:

$$\sum_i \underline{X}_i \cdot \delta \underline{r}_i \overset{(1)}{=} \sum_j \left\{ \sum_i \underline{X}_i \left(\frac{\partial}{\partial q_j}\underline{r}_i\right)\right\}\delta q_j = \sum_j Q_j \delta q_j$$

verallgemeinerten Kräfte $Q_j := \sum_i \underline{X}_i \frac{\partial}{\partial q_j}\underline{r}_i$

Falls $\underline{X}_i$ konservativ: $\underline{X}_i = -\underline{\nabla}_{r_i} V(\underline{r}_1,\dots,\underline{r}_N)$

$$\Rightarrow -\frac{\partial V}{\partial q_j} = -\sum_i \left(\underline{\nabla}_{r_i} V\right)\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \underline{X}_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} = Q_j$$

verallgemeinerte Kräfte haben auch ein Potenzial!

2.1.5 Lagrange-Gleichungen 2. Art

Ziel: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$

D'Alembertsches Prinzip: $\sum m_i \ddot{\underline{r}}_i \delta \underline{r}_i = \sum \underline{X}_i \delta \underline{r}_i = \sum Q_j \delta q_j$

Linke Seite $\overset{(1)}{=} \sum_j \left(\sum_i m_i \ddot{\underline{r}}_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j \underset{\text{Produktregel}}{=} \sum_j \sum_i \left\{\frac{d}{dt}\left(m_i \dot{\underline{r}}_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i \dot{\underline{r}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right)\right\}\delta q_j \quad (4)$

$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\Leftrightarrow (uv)' - uv' = u'v$ mit $u = \dot{\underline{r}}_i$, $u' = \ddot{\underline{r}}_i$, $v = \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}$

mit $\dot{\underline{r}}_i = \sum_j \underbrace{\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right)}_{\overset{(3)}{=} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\underline{v}_i} \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$ folgt: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_j} \qquad (5)$

Denn: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\right) = \sum_k \left(\frac{\partial^2 \underline{r}_i}{\partial q_k \partial q_j}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial^2 \underline{r}_i}{\partial t \partial q_j}$ (linke Seite)

$$\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_j} \overset{(2)}{=} \frac{\partial}{\partial q_j} \left\{ \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial q_k} \underline{r}_i\right) \dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \right\}$$

$$= \sum_k \left(\frac{\partial^2 \underline{r}_i}{\partial q_j \partial q_k} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \underline{r}_i}{\partial q_j \partial t} \qquad \text{(rechte Seite)}$$

$$\overset{(3),(5) \text{ in } (4)}{\Longrightarrow} \text{L.S.} = \sum_j \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \Big(m_i \underline{v}_i \underbrace{\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_j}}_{(3)} \Big) - m_i \underline{v}_i \underbrace{\frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_j}}_{(5)} \right\} \delta q_j$$

L.S. ausdrücken durch die gesamte kinetische Energie $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Es gilt

$$m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} T_i$$

Produktregel $\qquad v_i^2 = \underline{v}_i \cdot \underline{v}_i$

$$m_i \underline{v}_i \cdot \frac{\partial \underline{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} T_i$$

$$\Big\{ \dots \Big\} = \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \right\}$$

$$\Longrightarrow \sum_j \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0$$

frei variierbar

Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\boxed{\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j} \qquad j = 1, \dots, f \qquad (6)$$

NB: Einschränkung gegenüber Lagrange-Gleichungen 1. Art (d'Alembertsches Prinzip): nur für holonome Zwangsbedingungen [da sonst keine generalisierten Koordinaten definiert werden können) ("Diff. klappt nicht") speziell: konservative Kräfte $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

$$V(q_1, \ldots, q_f, t) = V(\underline{x}_1(q_1, \ldots, q_f, t), \ldots, \underline{x}_N(q_1, \ldots, q_f, t), t)$$

also $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \equiv 0$

steht für $\{q_1, \ldots, q_f\}$ usw.

Definiere Lagrange-Funktion: $L(q_j, \dot{q}_j, t) = T - V$

$$\overset{(G)}{\Rightarrow} \quad \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art für konservative Kräfte

NB: (i) L ist nicht eindeutig festgelegt, $L = T - V$ ist nur eine mögliche Form.

(ii) $$T(q_j, \dot{q}_j, t) \overset{(2)}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial t} \right)^2$$

$$= a + \sum_{j=1}^{f} b_j \dot{q}_j + \sum_{j,k=1}^{f} c_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Nur für skleronome Zwangsbedingungen ist T in $\dot{q}_j$ eine homogene Bilinearform $(a = b_j = 0)$

Anwendungsschema der Lagrange-Gleichungen 2. Art:

(i) Auswahl der generalisierten Koordinaten $q_1, \ldots, q_f$, die die (holonomen) Zwangsbedingungen identisch erfüllen: $\underline{x}_i = \underline{x}_i(q_1, \ldots, q_f, t)$

(ii) Berechne $\underline{v}_i(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{d}{dt} \underline{x}_i(q_j, t)$ und daraus $T(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{1}{2} \sum_i m_i \underline{v}_i^2$

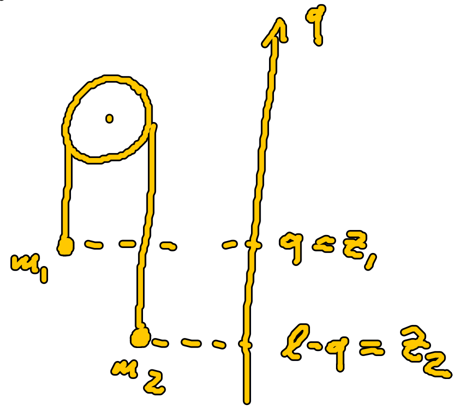
(iii) Für konservative Kräfte: $V(q_j, t) = V(\underline{x}_i(q_j, t), t)$

" nicht " Kräfte: $Q_j = \sum_i \underline{X}_i \frac{\partial \underline{x}_i}{\partial q_j}$

(iv) Aufstellen und Lösen der Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

Bsp: Atwoodsche Fallmaschine



(ii) − (iv)

$\therefore \quad (m_1 + m_2)\ddot{q} + (m_1 - m_2) q = 0$

Auflösung morgen