English Summary:

2.2.3 Gauge Transformations of the Lagrangian

charged particle in electromagnetic field

$\underline{E}(\underline{q},t) = -\underline{\nabla}\phi(\underline{q},t) - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(\underline{q},t)$, $\underline{B} = \underline{\nabla}\times\underline{A} = \mathrm{curl}\,\underline{A}$

$L(\underline{q},\dot{\underline{q}},t) = \frac{m}{2}\dot{\underline{q}}^2 + e(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}(\underline{q},t) - \phi(\underline{q},t)) \Rightarrow m\ddot{\underline{q}} = e\underline{E} + e\dot{\underline{q}}\times\underline{B}$

gauge invariance $\underline{A}' = \underline{A} + \underline{\nabla}\chi(\underline{q},t)$
$\phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\underline{q},t)$ $\Rightarrow$ $\boxed{L' = L + \frac{d}{dt}M(\underline{q},t)}$

gauge fct.

$\boxed{\delta\int L'dt = 0 \Leftrightarrow \delta\int L dt = 0}$

2.2.4 Form invariance of Lagrange eqs.

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_k} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_k} = 0$ for any set of generalized coordinates

3. Kontinuierliche Symmetrien und Erhaltungssätze

Betrachte kontinuierliche Transformationen, unter denen das physikal. System invariant ist. Dann gibt es zu jeder kontinuierlichen Invarianz gegen infinitesimale Transformationen eine Erhaltungsgröße I
(Integral der Bewegung oder Konstante der Bewegung, d.h. $\frac{dI}{dt} = 0$ längs der Bahn).
Dies ist die allgemeine Aussage des Theorems von Noether.

3.1 Theorem von Noether

Voraussetzung: Autonomes (d.h. nicht explizit zeitabhäng.) System mit f Freiheitsgraden u. Lagrangefkt. $L(q_1 \dots q_f, \dot q_1 \dots \dot q_f)$

Theorem (Emmi Noether 1882 – 1935):

Die Lagrangefkt. $L(q_1, \dots, \dot q_1 \dots)$ eines autonomen Systems sei unter den Transformationen $\underline{q} \to \underline{h}^s(\underline{q})$ invariant, wo s ein kontinuierlicher Parameter ist und $\underline{h}^{s=0}(\underline{q}) = \underline{q}$ die Identität.

Dann gibt es ein Integral der Bewegung

$$\boxed{I(\underline{q}, \underline{\dot q}) = \sum_{i=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}}_{\text{verallg. Impuls}} \underbrace{\left(\frac{d}{ds} h_i^s(\underline{q})\right)_{s=0}}_{\text{generator der infinites. Transf.}}}$$

Beweis: Sei $\underline{q} = \underline{q}(t)$ eine Lösung der Lagrangegln. Dann ist auch $\underline{q}(s,t) := \underline{h}^s(\underline{q}(t))$ Lösung,

d.h. $$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\underline{q}(s,t), \underline{\dot q}(s,t))}{\partial \dot q_i} = \frac{\partial L(\underline{q}(s,t), \underline{\dot q}(s,t))}{\partial q_i}$$

Invarianz der Lagrangefkt. für beliebige s:

$$\frac{d}{ds} L(\underline{q}(s,t), \underline{\dot q}(s,t)) = \sum_{i=1}^{f} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{dq_i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \frac{d\dot q_i}{ds}\right] \overset{!}{=} 0 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} I(\underline{q}, \underline{\dot q}) = \sum_{i=1}^{f} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\left(\frac{d}{ds} h_i^s(\underline{q})\right)_{s=0}\right)$$

$$= \sum_i \left[\underbrace{\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right)}_{\frac{\partial L}{\partial q_i}} \left(\frac{dq_i}{ds}\right)_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} \underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{dq_i}{ds}\right)_{s=0}}_{\frac{d\dot q_i}{ds}}\right]$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{d}{ds} L = 0 \qquad \square$$

Im Folgenden betrachten wir Beispiele.

3.2 Räumliche Translationsinvarianz

konservative Kräfte: $L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\underline{r}}_i^2 - V(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N)$

keine Zwangsbed., Euklid. Koord.

Translation in Richtung $\underline{e}_x$ $\boxed{\underline{h}^s : \underline{r}_i \to \underline{r}_i + s\underline{e}_x}$ s bel.

$(i = 1, \dots, N)$

Translationsinvarianz entlang x-Achse:

$$L(\underline{h}^s(\underline{r}_1) \dots, \dot{\underline{r}}_1 \dots) = \frac{1}{2}\sum_k m_k \dot{\underline{r}}_k^2 - V(\underline{r}_1 + s\underline{e}_x, \dots) \overset{!}{=} L(\underline{r}_i, \dot{\underline{r}}_i)$$

$$\frac{dL}{ds} = -\sum_{i=1}^{N} (\underline{\nabla}_{r_i} \cdot \underline{e}_x) V = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} V \overset{!}{=} 0$$

keine äußere Kraft in x-Richtung

Transformation:

$\underline{h}^s(\underline{r}_i) = \underline{r}_i + s\underline{e}_x$, $\underline{h}^{s=0}(\underline{r}_i) = \underline{r}_i$ (Identität)

$$\boxed{\frac{d}{ds}\underline{h}^s(\underline{r}_i) = \underline{e}_x}$$

Integral der Bewegung:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \underline{\nabla}_{\dot{r}_i} L \, \frac{d\underline{h}^s}{ds} = \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{e}_x = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{x}_i = P_x$$

Also: $\boxed{\text{Translationsinvarianz in x-Richtung}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Erhaltung der x-Komp. des Gesamtimpulses}}$

Andere Betrachtungsweise:

Wähle $q_1 = s$ als verallgemeinerte Koord.

Transformation: $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1 \cdots q_f, t) = \underbrace{q_1}_{\text{Schwerpkts. Koord.}} \underline{e}_x + \underbrace{\Delta \underline{r}_i(q_2 \cdots q_f, t)}_{\text{Relativkoord.}}$

$\rightarrow \frac{\partial}{\partial q_1} \underline{r}_i = \underline{e}_x$

$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \dot{\underline{r}}_i \overset{*}{=} \frac{\partial}{\partial q_1} \underline{r}_i = \underline{e}_x \qquad {}^* \; \dot{\underline{r}}_i = \sum_k \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$

$\underbrace{\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0}}_{\text{Invarianz}} \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = 0 \iff \underbrace{\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \text{const.}}}_{\text{Erhaltungsgröße}}$

Allgemein heißt

$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ der zur Koord. q_j konjugierte verallg. Impuls

Wenn $\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0$, also L invariant gegen q_1-Änderung, dann heißt q_1 zyklische Koordinate. Dann ist der konjugierte Impuls eine Erhaltungsgröße.

Hier $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}(T - V) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} T = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\underline{r}}_i^2$

$= \sum_i \frac{m_i}{2} 2 \dot{\underline{r}}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \dot{\underline{r}}_i \overset{*}{=} \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i \cdot \underline{e}_x = P_x$

Verallg. auf nichtkonservative Kräfte

$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1 = \sum_i \underline{X}_i \cdot \frac{\partial}{\partial q_1} \underline{r}_i = \underline{e}_x \sum_i \underline{X}_i = \underline{e}_x \cdot \sum_i \underline{F}_i = 0$

Translat. inv. in x-Richt.
(keine resultierende Kraft)

$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0 \wedge Q_1 = 0}_{\text{Invarianz}} \iff \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = 0 \iff P_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \text{const.}$

Beispiele: (i) 1 Teilchen im Potential $V(\underline{r}) = V(y, z)$

Pot. hängt nicht von x ab $\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot x} = m\dot x \equiv P_x = \text{const.}$$

(1 Integral der Bewegung: $I(\underline{r},\underline{\dot r}) = \nabla_{\underline{\dot r}} L \cdot \left(\frac{d h^s}{ds}\right)_{s=0}$

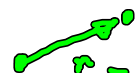
$$= \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot r}} \cdot \underline{e}_x$$

$$= \frac{\partial L}{\partial \dot x} = P_x \quad)$$

(ii) <u>2 Teilchen mit innerer Paarwechselwirkung</u>

$V(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = V(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$ (kann anisotrop sein!)

(keine äußeren Kräfte! Pot. unabh. v. Schwerpkt.koord.)



$\underline{r}_1 - \underline{r}_2$

Translationsinvarianz entlang x-, y-, z-Richtung:

$$L(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{\dot r}_1, \underline{\dot r}_2) = \frac{m_1}{2}\underline{\dot r}_1^2 + \frac{m_2}{2}\underline{\dot r}_2^2 - V(\underline{r}_1 - \underline{r}_2)$$

$$L(h^s(\underline{r}_1), h^s(\underline{r}_2), \underline{\dot r}_1, \underline{\dot r}_2) = \frac{m_1}{2}\underline{\dot r}_1^2 + \frac{m_2}{2}\underline{\dot r}_2^2 - V\big((\underline{r}_1 - s\underline{e}_i) - (\underline{r}_2 - s\underline{e}_i)\big)$$

$i = x, y, z$

$$= L(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{\dot r}_1, \underline{\dot r}_2)$$

3 Integrale der Bewegung:

$$I_x = \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot r}_1}\underline{e}_x + \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot r}_2}\underline{e}_x = \frac{\partial L}{\partial \dot x_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot x_2} = m_1 \dot x_1 + m_2 \dot x_2 = P_x = \text{const}$$

$$I_y \qquad = \frac{\partial L}{\partial \dot y_1} + \frac{\partial L}{\partial \dot y_2} = m_1 \dot y_1 + m_2 \dot y_2 = P_y = \text{const}$$

$$I_z \qquad = m_1 \dot z_1 + m_2 \dot z_2 = P_z = \text{const}$$

Dies ist der <u>Schwerpunkts-Erhaltungssatz</u>

$$\boxed{M\underline{\dot R} = \underline{P} = \text{const}}$$

mit Schwerpkts.koord. $\underline{R} := \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{2} m_i \underline{r}_i$

und Gesamtmasse $M := \sum_{i=1}^{2} m_i$