English summary: 4.2 Canonical equations of Hamilton (continued)

Recipe: (i) Choose generalized coordinates $\underline{q} = (q_1, \dots, q_f)$

(ii) transformation $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_f, t)$, $\dot{\underline{r}}_i = \dot{\underline{r}}_i(q_1, \dots, q_f, t)$

(iii) Get Lagrangian $L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = T - V$ (conservative forces)

(iv) Calculate generalized momenta $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \Rightarrow p_k = p_k(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$

$\dot{q}_k = \dot{q}_k(\underline{q}, \underline{p}, t)$

(v) Calculate Hamiltonian via Legendre transform of L

$$H(\underline{q}, \underline{p}, t) = \sum_{k=1}^{f} \dot{q}_k p_k - L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$$

(vi) Calculate canonical equations $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

3. Beispiel: Geladene Teilchen im elektromagnetischen Feld

Wiederholung von 2.2.3: $L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t) = \frac{m}{2} \dot{q}^2 + e\left(\dot{\underline{q}} \cdot \underline{A}(\underline{q}, t) - \phi(\underline{q}, t)\right)$

(iv) kanonisch konjugierte Impulse: $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = m \dot{q}_k + e A_k(\underline{q}, t)$

$$\Rightarrow \dot{q}_k = \frac{1}{m}(p_k - e A_k)$$

$$\text{(v)} \quad H = \sum_{k=1}^{3} \underbrace{\frac{1}{m}(p_k - eA_k)}_{=\dot{q}_k} p_k \underbrace{- \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^{3} (p_k - eA_k)^2}_{=T} \underbrace{- \frac{e}{m} \sum_{k=1}^{3} (p_k - eA_k) A_k + e\phi}_{=V}$$

(Einschub: elektrisches Feld: $\underline{E} = -\underline{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}$
vgl. 2.2.3

magnetische Induktion: $\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$)

$$H(\underline{q}, \underline{p}, t) = \frac{1}{2m}\left(\underline{p} - e\underline{A}(\underline{q}, t)\right)^2 + e\phi(\underline{q}, t)$$

Beachte: $m\dot{\underline{q}} = \underline{p} - e\underline{A}$ ist der kinetische Impuls (nur mit Geschwindigkeit verknüpft)

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad \text{ist der kanonische Impuls.}$$

(vi) $$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{1}{m}(p_k - eA_k) \qquad (*)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = -\frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{3}(p_\ell - eA_\ell)\left(-e\frac{\partial A_\ell}{\partial q_k}\right) - e\frac{\partial \phi}{\partial q_k}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{3} \dot{q}_\ell \, e\frac{\partial A_\ell}{\partial q_k} - e\frac{\partial \phi}{\partial q_k}$$

Test durch Kontrolle der bekannten Bewegungsgleichung $m\ddot{q}_k = \ldots$

$$m\ddot{q}_k \overset{(*)}{=} \dot{p}_k - e\frac{dA_k}{dt}$$

$$= \underbrace{e\sum_{\ell=1}^{3}\left(\dot{q}_\ell\frac{\partial A_\ell}{\partial q_k}\right) - e\frac{\partial \phi}{\partial q_k}}_{=\dot{p}_k} - e\underbrace{\left(\frac{\partial A_k}{\partial t} + \sum_{\ell=1}^{3}\frac{\partial A_k}{\partial q_\ell}\dot{q}_\ell\right)}_{=\frac{d}{dt}A_k}$$

$$= \underbrace{-e\frac{\partial \phi}{\partial q_k} - e\frac{\partial A_k}{\partial t}}_{eE_k} - e\Bigg[\underbrace{\sum_\ell \frac{\partial A_k}{\partial q_\ell}\dot{q}_\ell}_{=(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{\nabla})A_k} - \underbrace{\sum_\ell \dot{q}_\ell\frac{\partial A_\ell}{\partial q_k}}_{=\frac{\partial}{\partial q_k}(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A})}\Bigg]$$

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$$

$$\dot{\underline{q}}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = \underline{\nabla}(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{A}) - \underline{A}(\dot{\underline{q}}\cdot\underline{\nabla})$$

$$= eE_k - e(\dot{\underline{q}}\times\underbrace{\underline{B}}_{=\underline{\nabla}\times\underline{A}})_k$$

$\Rightarrow$ identisch zur Bewegungsgleichung aus 2.2.3 (Lagrange II)

4.3 kanonische Transformationen

Wahl der verallgemeinerten Koordinaten ist nicht eindeutig!

(Vgl. 2.2.4: Lagrange-Gleichungen 2. Art sind forminvariant unter beliebigen diffeomorphen Transformationen der Koordinaten

$$(q_1, \dots, q_f) \longrightarrow (Q_1, \dots, Q_f)$$

$$\Rightarrow \tilde{L}(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t) = L(\underline{q}(\underline{Q}, t), \dot{\underline{q}}(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t), t).$$

Frage: Unter welchen Transformationen $(\underline{q}, \underline{p}) \longrightarrow (\underline{Q}, \underline{P})$ sind die Hamilton-Gleichungen forminvariant?

D.h. mit $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$ soll auch $\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k}$, $\dot{P}_k = -\frac{\partial H}{\partial Q_k}$ gelten.

NB: (i) Die Klasse der erlaubten Transformation ist größer als beim Lagrange-Formalismus, da nun die p_k neben den q_k als unabhängige Variable betrachtet werden, die ebenfalls transformiert werden können.

(ii) Die neuen Q_k, P_k haben nicht notwendig mehr den Charakter von Orts- bzw. Impulsvariablen.

Motivation: In den Lagrange-Gleichungen 2. Art heißt q_j zyklisch, wenn

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \underset{\text{Euler-Lagrange-Gl.}}{\Rightarrow} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j = \text{const.}$$

keine Aussage über $\dot{q}_j$! $\dot{q}_j$ muss weiterhin als Variable behalten werden.

Hamilton-Formalismus: In $H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f, t)$ heißt q_j zyklisch, wenn

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0 \xRightarrow{\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}} \dot{p}_j = 0 \Rightarrow p_j =: \alpha_j = \text{const.}$$

d.h. q_j tritt in H nicht auf und p_j kann durch die Bewegungskonstante α_j ersetzt werden: $H(q_1, \ldots, q_{j-1}, \overset{\text{ohne } q_j!}{\downarrow} q_{j+1}, \ldots, q_f, p_1, \ldots, p_{j-1}, \alpha_j, p_{j+1}, \ldots, p_f, t)$.

Das kanonische System hat also nur noch $f-1$ Freiheitsgrade!

Idee: Lösung der Hamilton-Gleichungen, indem man Schritt für Schritt zyklische Variable durch geeignete Transformationen der (q,p) einführt, bis alle $\underline{Q}$ zyklisch sind: $H(P_1, \ldots, P_f, t)$ mit $P_k = \alpha_k = \text{const.}$

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H}{\partial P_k} =: v_k(t) \Rightarrow Q_k = \int_{t_0}^{t} v_k(t')\,dt' + \beta_k$$

$\Rightarrow 2f$ Konstanten der Bewegung $\alpha_k, \beta_k \quad (k = 1, \ldots, f)$

Beispiel: reduziertes 2-Körper-Problem in der Ebene $\perp$ Drehimpuls ℓ

$$L(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ zyklisch}: \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \ell = \text{const.}$$

Hamilton-Gleichungen: $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \dot{r} = \frac{p_r}{m}$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m r^2}$$

$$\Rightarrow H = p_r \dot{r} + p_\varphi \dot{\varphi} - L = m\dot{r}^2 + m r^2 \dot{\varphi}^2 - L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r)$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r)$$

mit $\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0$, d.h. φ zyklisch, folgt $p_\varphi = \alpha_\varphi = \ell = \text{const.}$

$$\Rightarrow H(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)$$

Reduktion von $f=2$ auf $f=1$ Freiheitsgrad!
(r,φ) (r)

Bedingung für eine kanonische Transformation:

Die Hamiltonschen Gleichungen folgen aus dem Hamiltonschen Prinzip:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, L \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Legendre-Trafo}}}{=} \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(\underline{q},\underline{p},t) \right\} = 0 \qquad (1)$$

Entsprechend muss für das System $\{\underline{Q},\underline{P},\overline{H}\}$ gelten:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - \overline{H}(\underline{Q},\underline{P},t) \right\} = 0 \qquad (2)$$

(1) und (2) sind <u>äquivalent</u>, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(\underline{q},\underline{p},t) = \sum_{i=1}^{f} P_i \dot{Q}_i - \overline{H}(\underline{Q},\underline{P},t) + \frac{d}{dt} M_1 \qquad (3)$$

mit beliebiger Funktion $M_1(\underline{q},\underline{Q},t)$ (Erzeugende der kanonischen Transformation)

(Verallgemeinerung der Eichfunktion: $M(\underline{q},t)$ aus Kap. 2.2.3)