English summary:

4.4 Symplectic Structure of the phase space

new notation: $\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}$ metric tensor: $\underline{\underline{J}}^2 = -\underline{\underline{1}}$, $\underline{\underline{J}}^{-1} = \underline{\underline{J}}^T = -\underline{\underline{J}}$

=> canonical equations: $\dot{\underset{\sim}{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underset{\sim}{H}_x \iff -\underline{\underline{J}}\, \dot{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{H}_x$

recap. on canonical transformations:

type-1 generating function: $M_1(\underline{q}, \underline{Q}, t)$, $p_i = \frac{\partial M_1}{\partial q_i}$, $P_i = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_i}$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_i}{\partial Q_k} = \frac{\partial^2 M_1}{\partial Q_k \partial q_i} = -\frac{\partial P_k}{\partial q_i}$$

type-2 " " : $M_2(\underline{q}, \underline{P}, t)$, $p_i = \frac{\partial M_2}{\partial q_i}$, $Q_i = \frac{\partial M_2}{\partial P_i}$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_i}{\partial P_k} = \frac{\partial^2 M_2}{\partial P_k \partial q_i} = \frac{\partial Q_k}{\partial q_i}$$

type-3 " " : $M_3(\underline{p}, \underline{Q}, t)$, $q_i = -\frac{\partial M_3}{\partial p_i}$, $P_i = -\frac{\partial M_3}{\partial Q_i}$

$$\Rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} = -\frac{\partial^2 M_3}{\partial Q_k \partial p_i} = \frac{\partial P_k}{\partial p_i}$$

type-4 " " : $M_4(\underline{p}, \underline{P}, t)$, $q_i = -\frac{\partial M_4}{\partial p_i}$, $Q_i = \frac{\partial M_4}{\partial P_i}$

$$\Rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial P_k} = -\frac{\partial^2 M_4}{\partial P_k \partial p_i} = -\frac{\partial Q_k}{\partial p_i}$$

Kanonische Transformationen in kompakter Notation:

Mit $\underset{\sim}{x} := \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$ (alte Var.), $\underline{Y} := \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_f \\ P_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$ (neue Var.) und $M_{\alpha\beta} := \frac{\partial x_\alpha}{\partial Y_\beta}$, $(M^{-1})_{\alpha\beta} := \frac{\partial Y_\alpha}{\partial x_\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \dots, 2f$

$$\underline{\underline{M}} = \{M\}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1\,2f} \\ \vdots & & & \\ M_{2f\,1} & & \dots & M_{2f\,2f} \end{pmatrix}$$

lassen sich die verschieden Erzeugenden einheitlich umschreiben:

$$\boxed{M_{\alpha\beta} = \sum_{\mu,\nu=1}^{2f} J_{\alpha\mu} J_{\beta\nu} (M^{-1})_{\nu\mu}} \qquad (1)$$

Beweis: (i) $\underline{\underline{M}}^{-1}$ ist tatsächlich die Inverse von $\underline{\underline{M}}$, da

$$\sum_{\gamma=1}^{2f} M_{\alpha\gamma}\left(M^{-1}\right)_{\gamma\beta} = \sum_{\gamma} \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\gamma}\frac{\partial y_\gamma}{\partial x_\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha=\beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) In Matrixform lautet (1): $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}\left(\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T$ (2)

Ausrechnen in Blockmatrizenform:

linke Seite von (2) $= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{Q}} & \frac{\partial \underline{q}}{\partial \underline{P}} \\ \frac{\partial \underline{p}}{\partial \underline{Q}} & \frac{\partial \underline{p}}{\partial \underline{P}} \end{pmatrix}}_{2f} \Big\} 2f = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial q_1}{\partial Q_2} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial Q_f} & \frac{\partial q_1}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial q_1}{\partial P_f} \\ \frac{\partial q_2}{\partial Q_1} & \cdots & & \vdots & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \frac{\partial q_f}{\partial Q_1} & \cdots & & \frac{\partial q_f}{\partial Q_f} & \frac{\partial q_f}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial q_f}{\partial P_f} \\ \frac{\partial p_1}{\partial Q_1} & \cdots & & \frac{\partial p_1}{\partial Q_f} & \frac{\partial p_1}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial p_1}{\partial P_f} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial p_f}{\partial Q_1} & \cdots & & \frac{\partial p_f}{\partial Q_f} & \frac{\partial p_f}{\partial P_1} & \cdots & \frac{\partial p_f}{\partial P_f} \end{pmatrix}$

rechte Seite von (2) $= \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{q}} & \frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{p}} \\ \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{q}} & \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{p}} \end{pmatrix}\right]^T$

$$= \begin{pmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{q}} & \frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{p}} \\ -\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{q}} & -\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{p}} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \underline{\underline{1}} \\ -\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{q}}\right)^T & \left(-\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{q}}\right)^T \\ \left(\frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{p}}\right)^T & \left(-\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{p}}\right)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{p}}\right)^T & -\left(\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{p}}\right)^T \\ -\left(\frac{\partial \underline{P}}{\partial \underline{q}}\right)^T & \left(\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{q}}\right)^T \end{pmatrix}$$

$\square$

Äquivalente Umformungen von (2):

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}\left(\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T \qquad \Big|\cdot\underline{\underline{J}} \qquad \text{mit } \underline{\underline{J}}^2 = -\underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}} = -\left(\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T$$

$$= -\left(\underline{\underline{M}}^{-1}\right)^T\underline{\underline{J}}^T \qquad \Big|\cdot\underline{\underline{M}}^T$$

$$\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = -\underbrace{\underline{\underline{M}}^T (\underline{\underline{M}}^{-1})^T}_{(\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{M}})^T} \underline{\underline{J}}^T = -\underline{\underline{J}}^T = \underline{\underline{J}}$$

Also: $\boxed{\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}}$

$\underline{\underline{J}}$: metrischer Tensor

$\underline{\underline{M}}$: Matrix der 2. Ableitungen der Erzeugenden der kanonischen Transformation.

d.h. die „Metrik" im Phasenraum ist invariant unter kanonischen Transformationen!

$\underline{\underline{J}}$ definiert eine „Metrik" über das verallgemeinerte schiefsymmetrische Skalarprodukt: $(\underline{x},\underline{y}) = \underline{x}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{y} = \sum_{i,k=1}^{2f} x_i J_{ik} y_k$

(schiefsymmetrische, nicht entartete Bilinearform)

$(\underline{x},\underline{y}) = -(\underline{y},\underline{x})$ $\quad$ $(\underline{x},\underline{y}) = 0 \ \forall \underline{y} \Rightarrow \underline{x} = 0$ $\quad$ $(\underline{x}, \lambda_1 \underline{y}_1 + \lambda_2 \underline{y}_2) = \lambda_1 (\underline{x},\underline{y}_1) + \lambda_2 (\underline{x},\underline{y}_2)$

NB: Es gilt: $(\underline{x},\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x}$ („selbstorthogonal")

Unterscheide die <u>symplektische Struktur</u> auf $\mathbb{R}^{2f}$ von einer <u>euklidischen Metrik</u>: $(\underline{x},\underline{y})_{Eu} := \sum_i x_i y_i = \underline{x}^T \underline{\underline{g}}\, \underline{y}$ mit metrischem Tensor $\underline{\underline{g}} = \underline{\underline{1}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ im Euklidischen Raum.

$(\underline{x},\underline{y})_{Eu} = (\underline{y},\underline{x})_{Eu}$, $\quad (\underline{x},\underline{x})_{Eu} \geq 0$

<u>Fazit</u>: Die Invarianz der kanonischen Gleichungen $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x$ unter kanonischen Transformation kann durch die symplektische Struktur des Phasenraums beschrieben werden.

NB: Die Menge der Matrizen $\underline{\underline{M}}$ mit $\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}$ bildet die <u>reelle symplektische Gruppe</u> über $\mathbb{R}^{2f}$. (Symmetriegruppe der symplektischen Struktur)

4.5 Der Liouvillesche Satz

Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x$:

$$\underline{x}(t, \underbrace{t_0, \underline{x}_0}_{\text{Anfangskonfiguration}}) =: \phi_{t,t_0}(\underline{x}_0) \qquad \text{<u>Fluss im Phasenraum Γ</u>}$$

Der Fluss beschreibt die Zeitentwicklung der Anfangskonfiguration:

$$\phi_{t,t_0} : \Gamma \longrightarrow \Gamma \qquad \phi_{t_0,t_0}(\underline{x}) = \underline{X}(t_0) = \underline{x}_0(t_0)$$

$$\underline{x}_0(t_0) \longmapsto \underline{x}(t) \qquad \phi_{s,t}\left(\phi_{t,t_0}(\underline{x})\right) = \phi_{t+s,t_0}(\underline{x})$$

Kurvenschar, durch die Zeit parametrisiert

Beispiel: 1-dim. harmonischer Oszillator: $\dot{q} = p \quad , \dot{p} = -\omega_0^2 q$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} \;,\; \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \;,\; \underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

$$\text{Lösung: } \underline{x}(t) = \phi_{t,t_0}(\underline{x}_0) = \exp\left[(t-t_0)\underline{\underline{A}}\right]\underline{x}_0$$

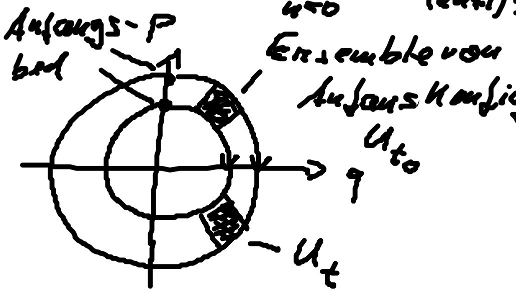
$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \underline{\underline{A}}^n\right] \underline{x}_0$$

$$= \left[\underline{\underline{1}} \cos \omega_0(t-t_0) + \frac{1}{\omega_0} \underline{\underline{A}} \sin \omega_0(t-t_0)\right] \underline{x}_0$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\omega_0(t-t_0) & \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0(t-t_0) \\ -\omega_0 \sin \omega_0(t-t_0) & \cos \omega_0(t-t_0) \end{pmatrix} \underline{x}_0$$

Test über Potenzen von $\underline{\underline{A}}$ $(\underline{\underline{A}}^{2n}, \underline{\underline{A}}^{2n+1})$ und Reihendarstellung von

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \,.$$



Das Gebiet (Phasenraumausschnitt) U_{t_0} wandert mit dem Fluss ϕ_{t,t_0} ohne Änderung der Form und Orientierung um den Nullpunkt.

Hier: Alle Phasenpunkte rotieren mit gleicher, konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0.

$\Rightarrow$ Phasenvolumen ist bei der Zeitentwicklung erhalten.

Die Form ändert sich im Allgemeinen, aber es gilt stets:

Liouvillescher Satz: Bei Hamiltonscher Zeitentwicklung ist das Phasenvolumen erhalten. (auch seine Orientierung)