

English summary:

4.4 Symplectic Structure of the phase space

new notation: $\underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$, $\underline{H}_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$, $\underline{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ metric tensor: $\underline{J}^2 = -\underline{1}$, $\underline{J}^{-1} = \underline{J}^T = -\underline{J}$

\Rightarrow canonical equations: $\dot{\underline{x}} = \underline{J} \underline{H}_x \Leftrightarrow -\underline{J} \dot{\underline{x}} = \underline{H}_x$

recap. on canonical transformations:

type-1 generating function: $M_1(q, Q, t)$, $p_i = \frac{\partial M_1}{\partial q_i}$, $P_i = -\frac{\partial M_1}{\partial Q_i}$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 M_1}{\partial Q_j \partial q_i} = -\frac{\partial P_j}{\partial q_i}$$

type-2 " " : $M_2(q, P, t)$, $p_i = \frac{\partial M_2}{\partial q_i}$, $Q_i = \frac{\partial M_2}{\partial P_i}$

$$\Rightarrow \frac{\partial p_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 M_2}{\partial P_j \partial q_i} = \frac{\partial Q_j}{\partial q_i}$$

type-3 " " : $M_3(p, Q, t)$, $q_i = -\frac{\partial M_3}{\partial p_i}$, $P_i = -\frac{\partial M_3}{\partial Q_i}$

$$\Rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} = -\frac{\partial^2 M_3}{\partial Q_j \partial p_i} = \frac{\partial P_j}{\partial p_i}$$

type-4 " " : $M_4(p, P, t)$, $q_i = -\frac{\partial M_4}{\partial p_i}$, $Q_i = \frac{\partial M_4}{\partial P_i}$

$$\Rightarrow \frac{\partial q_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 M_4}{\partial P_j \partial p_i} = -\frac{\partial Q_j}{\partial p_i}$$

kanonische Transformationen in kompakter Notation:

Mit $\underline{x} := \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$ (alte var.) , $\underline{y} := \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_f \\ P_1 \\ \vdots \\ P_f \end{pmatrix}$ (neue var.) und $M_{\alpha\beta} := \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$, $(M^{-1})_{\alpha\beta} := \frac{\partial y_\alpha}{\partial x_\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \dots, 2f$

$$M = \{M\}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1,2f} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{2f,1} & \dots & \dots & M_{2f,2f} \end{pmatrix}$$

lassen sich die verschiedenen Erzeugenden einheitlich beschreiben:

$$M_{\alpha\beta} = \sum_{\mu, \nu=1}^{2f} J_{\alpha\mu} J_{\nu\beta} (M^{-1})_{\nu\mu}$$

(1)

Beweis: (i) \underline{H}^{-1} ist tatsächlich die Inverse von \underline{H} , da

$$\sum_{\gamma=1}^{\alpha} H_{\alpha\gamma} (H^{-1})_{\gamma\beta} = \sum_{\gamma} \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial y_{\gamma}} \frac{\partial y_{\gamma}}{\partial x_{\beta}} = \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha=\beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) In Matrixform lautet (1): $\underline{H} = \underline{J} (\underline{J} \underline{H}^{-1})^T$ (2)

Ausrechnen in Blockmatrixform:

linke Seite von (2) = $\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}}_{\underline{J}}$ $\cdot \underline{H}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial x_{\alpha}} & \frac{\partial x_1}{\partial x_{\beta}} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial x_{\alpha}} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial x_{\alpha}}{\partial x_2} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$

rechte Seite von (2) = $\begin{pmatrix} 0 & \underline{1} \\ -\underline{1} & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & \underline{1} \\ -\underline{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \right]^T$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \underline{1} \\ -\underline{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \underline{1} \\ -\underline{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\frac{\partial x_1}{\partial y_1})^T & (-\frac{\partial x_1}{\partial y_2})^T \\ (\frac{\partial x_2}{\partial y_1})^T & (-\frac{\partial x_2}{\partial y_2})^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{\partial x_1}{\partial y_2})^T & -(\frac{\partial x_1}{\partial y_1})^T \\ -(\frac{\partial x_2}{\partial y_2})^T & (\frac{\partial x_2}{\partial y_1})^T \end{pmatrix}$$

Äquivalente Umformungen von (2): □

$$\underline{H} = \underline{J} (\underline{J} \underline{H}^{-1})^T \quad | \cdot \underline{J} \quad \text{mit } \underline{J}^2 = -\underline{1}$$

$$\underline{J} \underline{H} = - (\underline{J} \underline{H}^{-1})^T$$

$$= - (\underline{H}^{-1})^T \underline{J}^T \quad | \cdot \underline{M}^T$$

$$\underline{M}^T \underline{J} \underline{M} = - \underbrace{\underline{M}^T (\underline{M}^T)^T}_{(\underline{M}^T \underline{M})^T} \underline{J}^T = - \underline{J}^T = \underline{J}$$

Also: $\underline{M}^T \underline{J} \underline{M} = \underline{J}$ \underline{J} : metrischer Tensor
 \underline{M} : Matrix der 2. Ableitungen der Erzeugenden der kanonischen Transformation.

d.h. die „Metrik“ im Phasenraum ist invariant unter kanonischen Transformationen!

\underline{J} definiert eine „Metrik“ über das reellgenwertige schiefsymmetrische Skalarprodukt: $(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^T \underline{J} \underline{y} = \sum_{i=1}^{2f} x_i J_{ii} y_i$

(Schiefsymmetrische, nicht-entartete Bilinearform)

$$(\underline{x}, \underline{y}) = -(\underline{y}, \underline{x}) \quad (\underline{x}, \underline{y}) = 0 \quad \forall \underline{y} \Rightarrow \underline{x} = 0 \quad (\underline{x}, \lambda_1 \underline{y}_1 + \lambda_2 \underline{y}_2) = \lambda_1 (\underline{x}, \underline{y}_1) + \lambda_2 (\underline{x}, \underline{y}_2)$$

NB: Es gilt: $(\underline{x}, \underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x}$ („Selbstorthogonal“)

Unterscheide die symplektische Struktur auf \mathbb{R}^{2f} von einer

euklidischen Metrik: $(\underline{x}, \underline{y})_{Eu} := \sum_i x_i y_i = \underline{x}^T \underline{g} \underline{y}$ mit metrischem

Tensor $\underline{g} = \underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ im Euklidischen Raum.

$$(\underline{x}, \underline{y})_{Eu} = (\underline{y}, \underline{x})_{Eu}, \quad (\underline{x}, \underline{x})_{Eu} \geq 0$$

Fazit: Die Invarianz der kanonischen Gleichungen $\dot{\underline{x}} = \underline{J} \underline{H}_x$ unter kanonischen Transformation kann durch die symplektische Struktur des Phasenraums beschrieben werden.

NB: Die Menge der Matrizen \underline{M} mit $\underline{M}^T \underline{J} \underline{M} = \underline{J}$ bildet die reelle symplektische Gruppe über \mathbb{R}^{2f} . (Symmetriegruppe der symplektischen Struktur)

4.5 Der Liouvillesche Satz

Lösungen der Hamiltonschen Gleichungen $\dot{\underline{x}} = \underline{J} \underline{H}_x$:

$$\underline{x}(t, t_0, \underline{x}_0) =: \underbrace{\phi}_{t, \underline{x}_0}(\underline{x}_0) \quad \text{Fluss im Phasenraum } \Gamma$$

Anfangskonfiguration

Der Fluss beschreibt die Zeitentwicklung der Anfangs Konfiguration:

$$\phi_{t,t_0} : \Gamma \rightarrow \Gamma$$

$$\phi_{t,t_0}(\underline{x}) = \underline{x}(t) = \underline{x}_0(t_0)$$

$$\underline{x}_0(t_0) \mapsto \underline{x}(t)$$

$$\phi_{t,t_0}(\phi_{s,t_0}(\underline{x})) = \phi_{t+s,t_0}(\underline{x})$$

Kurvenabschnitte, durch die Zeit parameterisiert

Beispiel: 1-dim. harmonischer Oszillator: $\dot{q} = p$, $\dot{p} = -\omega_0^2 q$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

$$\text{Lösung: } \underline{x}(t) = \phi_{t,t_0}(\underline{x}_0) = \exp[(t-t_0)\underline{A}]\underline{x}_0$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \underline{A}^n \right] \underline{x}_0$$

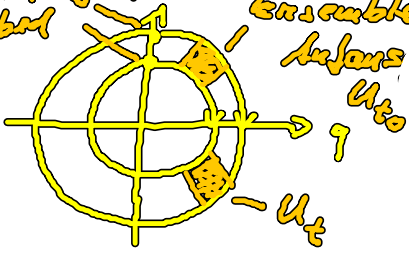
$$= \left[\underline{1} \cos \omega_0(t-t_0) + \frac{1}{\omega_0} \underline{A} \sin \omega_0(t-t_0) \right] \underline{x}_0$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \omega_0(t-t_0) & \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0(t-t_0) \\ -\omega_0 \sin \omega_0(t-t_0) & \cos \omega_0(t-t_0) \end{pmatrix} \underline{x}_0$$

Test über Potenzen von \underline{A} ($\underline{A}^{2n}, \underline{A}^{2n+1}$) und Reihenentwicklung von

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{und} \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Anfangs-P
bed



Ensemble von
Anfangskonfigurationen

Das Gebiet (Phasevolumenelement) u_t wandert mit dem Fluss ϕ_{t,t_0} ohne Änderung der Form und Orientierung um den Nullpunkt.

Hier: Alle Phasenpunkte rotieren mit gleicher, konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_0 .

\Rightarrow Phasenvolumen ist bei der Zeitentwicklung erhalten.

Die Form ändert sich im Allgemeinen, aber es gilt stets:

Liouville'scher Satz: Bei Hamiltonscher Zeitentwicklung ist das Phasenvolumen erhalten. (auch seine Orientierung)