English summary:

4.6 Poisson brackets

Consider an observable $g = g(q, p, t)$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dt} = \sum_{i=1}^{f} \Big(\frac{\partial g}{\partial q_i} \underbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}}_{=\dot{q}_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \Big) + \frac{\partial g}{\partial t} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i$$

Definition of Poisson brackets: $\{f,g\} = \sum_{i=1}^{f} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \Big)$

e.g.: canonical equations: $\dot{q}_k = \{q_k, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$

$\dot{p}_k = \{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$

$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$

$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$

equivalent statements: Transformation $\underline{x} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \rightarrow \underline{y} = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$ is canonical

$\Leftrightarrow$ (a) canonical equation $\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{J}}\, \underline{H}_x$ are invariant

$\Leftrightarrow$ (b) Poisson brackets $\{f,g\}$ " "

$\Leftrightarrow$ (c) fundamental Poisson brackets " "

$\Leftrightarrow$ (d) Jacobian matrix $M_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$ is symplectic $(\underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}})$

$\Leftrightarrow$ (e) Existence of generating function

4.7 Die Hamilton-Jacobi-Theorie

Strategie: Suche eine kanonische Transformation, die alle Koordinaten zyklisch macht.

$\Rightarrow$ Transformierte Hamilton-Funktion: $\tilde{H} \equiv 0$

Wähle speziell als Erzeugende der kanonischen Transformation:

$$M_2(q, \underline{P}, t) =: S$$

Dann ist folgende kanonische Transformation gesucht:

$$(q,p) \longrightarrow (\underline{Q},\underline{P}),\quad H(q,p,t) \longrightarrow \overline{H}(\underline{Q},\underline{P},t) = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

$$\text{mit } p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k},\quad Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k}$$

so dass gilt:

$$\boxed{\overline{H} = H(q_1,\dots,q_f,\underset{\uparrow \atop P_1}{\frac{\partial S}{\partial q_1}},\dots,\underset{\uparrow \atop P_f}{\frac{\partial S}{\partial q_f}},t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0}$$

<u>Hamilton-Jacobi-Dgl.</u>

(nichtlineare partielle Dgl. 1. Ordnung für $S(q,\underline{\alpha},t)$, $\alpha_k = P_k = \text{const}$, also nur $f+1$ Variable q,t)

kanonischen Gleichungen: $\dot{P}_k = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial Q_k} \equiv 0 \Rightarrow P_k = \alpha_k = \text{const}$

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial \overline{H}}{\partial P_k} \equiv 0 \Rightarrow Q_k = \beta_k = \text{const}$$

<u>Lösungsschema für die Hamilton-Jacobi-Dgl.:</u>

(i) $H(q,p,t)$, $p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \Rightarrow H(q,\frac{\partial S}{\partial q_1},t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

(ii) Löse Hamilton-Jacobi-Dgl. $\Rightarrow S(q,\underline{\alpha},t)$ mit $\underline{\alpha} = \underline{P}$

(iii) Aus der Erzeugende $S(q,\underline{\alpha},t)$ folgt:

$$Q_k = \frac{\partial S(q,\underline{\alpha},t)}{\partial \alpha_k} = \beta_k \quad \underset{\det \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_k \partial q_l} \neq 0}{\overset{\text{Umkehrung}}{\Longrightarrow}} \quad q_j = q_j(\underline{\alpha},\underline{\beta},t)$$

(iv) $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j} = p_j(q,\underline{\alpha},t) = p_j(q(\underline{\alpha},\underline{\beta},t),\underline{\alpha},t)$

(v) Bestimmung von $\underline{\alpha},\underline{\beta}$ aus den Anfangsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(iii)}{\Longrightarrow} q_j(0) = q_j(\underline{\alpha},\underline{\beta},0) \\ &\overset{(iv)}{\Longrightarrow} p_j(0) = p_j(\underline{\alpha},\underline{\beta},0) \end{aligned}\right\} \text{umstellen nach } \begin{aligned} &\underline{\alpha}(q(0),p(0)) \\ &\underline{\beta}(q(0),p(0)) \end{aligned}$$

physikalische Bedeutung von S:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{k=1}^{f} \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_k}}_{p_k} \dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{\tilde{H}-H=-H} = \sum_k p_k \dot{q}_k - H = L$$

Lagrange-Funktion

Also $S = \int L\, dt$: Wirkungsfunktion

Bsp: 1-dimensionaler harmonischer Oszillator

(i) $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 q^2$, $S(q,P,t)$ mit $p = \frac{\partial S}{\partial q}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

(ii) Lösungsansatz: $S(q,P,t) = W(q;P) + V(t;P)$ Separationsansatz nach q und t

Parameter

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 + \frac{m}{2}\omega^2 q^2}_{\text{unabhängig von } t} = \underbrace{-\frac{dV}{dt}}_{\text{unabhängig von } q} \stackrel{!}{=} \alpha = \text{const}$$

identifiziere mit Parameter P

$$\Rightarrow V(t) = -\alpha t + V_0$$

$$\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 = m^2\omega^2\left(\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2\right) \Rightarrow W = m\omega \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2}$$

Also: $S(q,\alpha,t) = m\omega \int dq \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2} - \alpha t + \underbrace{V_0}_{=0 \text{ (o.B.d.A.)}}$

$$= -\alpha t + \left[\frac{q}{2}\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2} + \frac{\alpha}{m\omega^2} \arcsin\left(q\sqrt{\frac{m\omega^2}{2|\alpha|}}\right)\right]$$

(iii) $$Q = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = -t + \frac{1}{\omega} \arcsin\left(q\omega\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\right) \stackrel{!}{=} \beta$$

$$\Rightarrow q = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \sin\left(\omega(t+\beta)\right) = q(\alpha,\beta,t)$$

(iv) $$p = \frac{\partial S}{\partial q} = m\omega\sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2} - q^2}$$

$$= \sqrt{2\alpha m} \cos\left(\omega(t+\beta)\right) = p(\alpha,\beta,t)$$

(v) Anfangsbedingungen: $p(0)=0$, $q(0)=q_0 \neq 0$ (maximal ausgelenkt), $t=0$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow q_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}\sin(\omega\beta) \\ &0 = p_0 = \sqrt{2\alpha m}\cos(\omega\beta) \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2\omega} \end{aligned}\right\} \Rightarrow q_0 = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}}$$

also: $\alpha = \frac{m}{2}\omega^2 q_0^2 = E$: Gesamtenergie

somit: $P = \alpha = E$ (Energie)

$Q = t_0$ (Zeit)

Spezialfall: nicht explizit zeitabhängiges $H = H(q,p)$

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow H$ ist Integral der Bewegung $\left(\frac{d}{dt}H = \{H,H\} = 0\right)$

$\frac{\partial H}{\partial t} = 0$

Hamilton-Jacobi-Dgl: $H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

Lösungsansatz: $S(q, \underline{P}, t) = W(q; \underline{P}) - Et$

$\Rightarrow H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial W}{\partial q_f}\right) = E$ (Energie bei skleronomen Zwangsbedingungen)

$W(q, \underline{P})$ heißt <u>verkürzte Wirkungsfunktion</u>.

Einschub: Zusammenfassung der Kapitel 1 bis 4

1. Arbeit im Gravitationsfeld
2. Schwere und träge Masse
3. Mathematisches Pendel als dynamisches System
4. Erzwungene Schwingung und Green'sche Funktion
5. Zentralkraft und Drehimpulserhaltung
6. Periheldrehung

Newtonsche Mechanik (Kap. 1)

7. Freier Fall auf der rotierenden Erde
8. Foucault'sches Pendel

beschleunigte/rotierende Bezugssysteme (1.8/1.9)

$\underline{r}' = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t + \underline{\underline{R}}\,\underline{r}$, $\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}_0 + \dot{\underline{r}}' + \underline{\omega} \times \underline{r}'$

9. Fliehkraftpendel mit Lagrange I
10. Rollendes Rad auf rauer Unterfläche

Lagrange Gl. 1. Art: $m_j \ddot{x}_j - k_j - \sum_{\mu=1}^{\lambda} \lambda_\mu \phi_j^\mu = 0$

D'Alembertsches Prinzip: $\sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\underline{r}}_i - \underline{X}_i\right) \cdot \delta \underline{r}_i$
(2.1.3)

Zwangskräfte: $m_i \ddot{x}_i = \underline{X}_i + \underline{Z}_i$, $\sum_{j=1}^{3N} \phi_j^\mu \delta x_j = 0$
(2.1.1)

11. Fliehkraftpendel mit Lagrange II
12. Doppelpendel
13. Optimale Rutsche
14. Wirkungsfunktional
15. Erhaltungsgrößen mit Lagrange II
16. Rayleighsche Dissipationsfunktion

Lagrange Gl. 2. Art:

holonome Zwangsbedingungen: $f_\lambda(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0$

$\Rightarrow$ generalisierte Koordinaten: $\underline{q} = (q_1, \dots, q_f)$
(2.1.4)

Euler-Lagrange-Gl.: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, $L = T - V$
(2.1.5)
$j = 1, \dots, f$

konservative Kräfte $\underline{X}_i = -\underline{\nabla}_{r_i} V$

Hamiltonsches Wirkungsprinzip: (2.2)

$W = \int_{t_1}^{t_2} dt\, L(q, \dot{q}, t)$ mit $\delta W = 0$

nichtholonom: $\int_{t_1}^{t_2} dt \left(\delta T + \underbrace{\delta A}_{= \sum_i \underline{X}_i \cdot \delta \underline{r}_i}\right) = 0$

17. Erhaltungsgrößen und Symmetrien
18. Drehmatrizen
19. Noether-Theorem: helikoide Symmetrie
20. Noether-Theorem: Invarianz unter Zeittranslation

21. Longitudinale Molekülschwingungen

Integral der Bewegung: (3)

$I(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d}{ds} h_i^s(q)\right)_{s=0}$

$\frac{d}{ds} L(q(s,t), \dot{q}(s,t)) = 0 = \frac{d}{dt} I(q, \dot{q})$

Noether-Theorem

Translationsinvarianz $\rightarrow$ Impulserhaltung

Rotationsinvarianz $\rightarrow$ Drehimpulserhaltung

Zeittranslationsinvarianz $\rightarrow$ Energieerhaltung

22. Legendre-Transformation
23. Hamilton-Formalismus: Fadenpendel
24. Weihnachtsmann auf Kugel
25. Fliehkraftpendel im Hamilton-Formalismus

Hamiltonscher kanonischer Formalismus

Legendre-Transformation von L (4.1)

$H(q, p, t) = \sum_{k=1}^{f} p_k \dot{q}_k - L(q, \dot{q}, t)$, $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$

Hamiltonsche Gleichungen: $\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$, $\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$
(4.2)

konservative Kräfte: $H = T + V$

26. Kanonische Transformation I
27. Kanonische Transformation II
28. Poisson-Klammern
29. Poisson-Theorem
30. Poisson-Klammer und kanonische Transformation
31. Liovillescher Satz

Bei Hamiltonscher Zeitentwicklung ist das Phasenraumvolumen erhalten (4.5)

kanonische Transformationen (4.3)

$(q,p) \longrightarrow (\underline{Q},\underline{P})$

Legendre-Trafo. bzgl. q

Erzeugende: $M_1(q,\underline{Q},t)$, $M_2(q,\underline{P},t)$, $M_3(p,Q,t)$, $M_4(p,\underline{P},t)$

Legendre-Trafo. bzgl. $\underline{Q}$

$$\underline{\underline{M}} = \{ M_{\alpha\beta} \}, \quad M_{\alpha\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}, \quad \underline{\underline{M}}^T \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{M}} = \underline{\underline{J}}$$

symplektische Matrix (4.4)

metrischer Tensor

Poisson-Klammern: (4.6)

$$\frac{dg}{dt} = \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}, \quad \{f,g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$$

32. Starrer Körper: Trägheitstensor des homogenen Quaders
33. Starrer Körper II „Drehmoment ⊥ Drehimpuls"
34. Trägheitsmoment der homogenen Kugel