English Summary:

5. Mechanics of rigid bodies

Definition: (A) system of n point masses with constant distances between any two points

(B) continuous distribution of mass $\rho(\underline{r})$

coordinate system: from origin of fixed lab frame to center of mass ($\underline{R}$)

+ from center of mass to point in/on the rigid body ($\underline{\tilde{r}}$)

5.1 Kinetic energy and inertia tensor

velocity: $\underline{v} = \underline{V} + \underline{\omega} \times \underline{X}$

velocity of center of mass

angular velocity

vector from center of mass

Kinetic energy

$$(A)\quad T = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \omega_\mu J_{\mu\nu} \omega_\nu$$

total mass

$\mu, \nu = 1,2,3$

inertia tensor

$$J_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n} m_i \left[(\underline{x}^{(i)})^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu^{(i)} x_\nu^{(i)} \right]$$

$$(B)\quad T = \underbrace{\frac{1}{2} M V^2}_{= T_{trans}} + \underbrace{\frac{1}{2} \underline{\omega}\, \underline{\underline{J}}\, \underline{\omega}}_{= T_{rot}}$$

$$J_{\mu\nu} = \int d^3x\, \rho(\underline{x}) \left[x^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu \right]$$

5.2 Properties of inertia tensor

transformation: $\underline{x} \to \underline{x}' = \underline{\underline{R}}\, \underline{x}$, $\underline{\underline{R}} \in SO(3)$: rotational matrix in $\mathbb{R}^3$, orthogonal $\underline{\underline{R}}^T \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{1}}$

$$\underline{\underline{J}} \to \underline{\underline{J}}' = \underline{\underline{R}}\, \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{R}}^T$$

Fortsetzung von 5.2 Eigenschaften des Trägheitstensors

Weitere Eigenschaften:

(i) $J_{\mu\nu}$ enthält einen kugelsymmetrischen, d.h. rotationsinvarianten, Anteil: $x^2 \delta_{\mu\nu}$

(ii) $\underline{\underline{J}}$ ist linear in $\rho(\underline{x})$ => additiv bei Zusammenfügen zweier starrer Körper

(iii) $\underline{\underline{J}}$ ist reeller, symmetrischer Tensor, dargestellt die reelle symmetrische Matrix:

$$\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix} = \underline{\underline{J}} \doteq \int d^3x\, \rho(\underline{x}) \begin{pmatrix} x_2^2+x_3^2 & -x_1x_2 & -x_1x_3 \\ -x_2x_1 & x_3^2+x_1^2 & -x_2x_3 \\ -x_3x_1 & -x_3x_2 & x_1^2+x_2^2 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisierbar durch geeignete orthogonale Transformation $\underline{\underline{R}}_0 \in SO(3)$:

$$\underline{\underline{J}}' = \underline{\underline{R}}_0\, \underline{\underline{J}}\, \underline{\underline{R}}_0^T = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$$

d.h. gedrehtes körperfestes Koordinatensystem (y_1, y_2, y_3) in Richtung der **Hauptträgheitsachsen**:

$$\underline{\underline{J}}' = \int d^3y\, \rho(\underline{y}) \begin{pmatrix} y_2^2+y_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & y_3^2+y_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & y_1^2+y_2^2 \end{pmatrix}, \text{ also } J_i \geq 0 \quad i=1,2,3$$

(positiv semidefinit)

Die Diagonalisierung führt auf folgendes Eigenwertproblem:

$$\underline{\underline{J}}\, \underline{\hat{\omega}}^{(i)} = \underbrace{J_i}_{\text{Eigenwerte}}\, \underbrace{\underline{\hat{\omega}}^{(i)}}_{\text{Eigenvektoren}}$$

homogenes lineares Gleichungssystem

Suche die Hauptachsenrichtungen $\underline{\hat{\omega}}^{(i)}$, so dass $\underline{\underline{J}}$ diagonal wird!

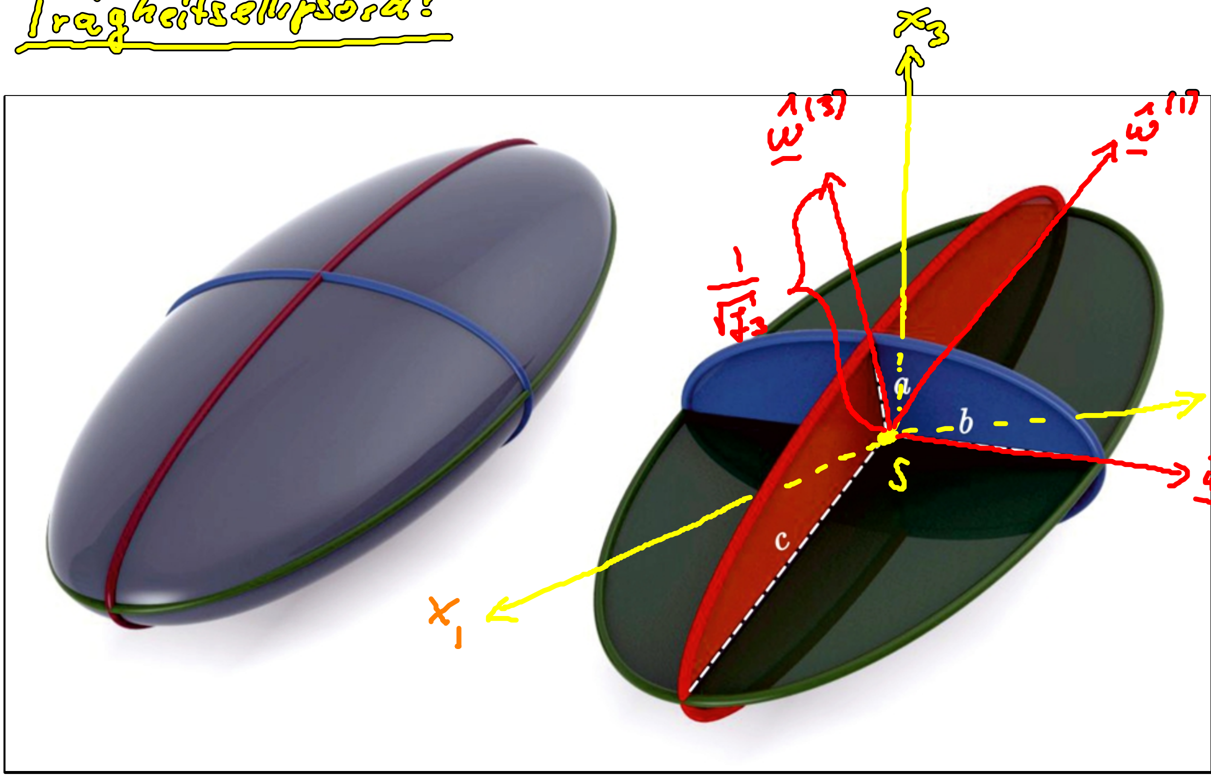
$$\Leftrightarrow \quad \det\left(\underline{\underline{J}} - J_i\, \underline{\underline{1}}\right) = 0$$

3 reelle, positiv semidefinite Eigenwerte J_i

Trägheitsmoment bezgl. Achse $\underline{n}$: $J(\underline{n}) = \underline{n}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{n} \Rightarrow T_{rot} = \frac{1}{2}\omega^2 J(\underline{n})$

$\underline{\omega} = \underline{n}\omega$

Trägheitsellipsoid:



Bsp: ialms.net/sim/

(iv) J_i heißen **Hauptträgheitsmomente**:

$J_1 \neq J_2 \neq J_3$: unsymmetrischer Kreisel

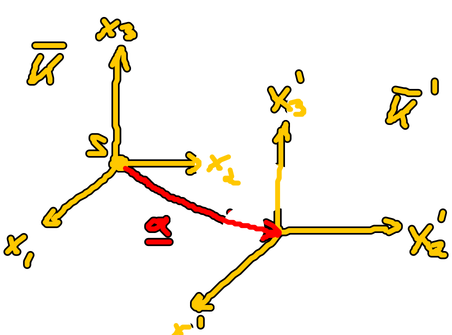
$J_1 = J_2 \neq J_3$: symmetrischer Kreisel (Axialsymmetrie)

$J_1 = J_2 = J_3$: Kugelkreisel $\quad \rho(\underline{r}) = \rho(r)$

Satz von Steiner

Sei $J_{\mu\nu}$ der Trägheitstensor in einem im Schwerpunkt S zentrierten Körperfesten System $\bar{K}$. Sei $\bar{K}'$ ein zu $\bar{K}$ achsenparalleles, um $\underline{a}$ verschobenes System. Dann ist $J'_{\mu\nu}$ in $\bar{K}'$ gegeben durch

$$\boxed{J'_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + M\left(a^2\delta_{\mu\nu} - a_\mu a_\nu\right)}$$



Beweis: $J'_{\mu\nu} = \int d^3x'\, \rho(\underline{x}')\left[(\underline{x}')^2\delta_{\mu\nu} - x'_\mu x'_\nu\right]$

$$= \int d^3x\, \rho(\underline{x})\left[(\underline{x}+\underline{a})^2\delta_{\mu\nu} - (x_\mu + a_\mu)(x_\nu + a_\nu)\right]$$

$\underline{x}' = \underline{x} + \underline{a}$

Ausmultiplizieren liefert:

$$J'_{\mu\nu} = \int d^3x\, \rho(\underline{x}) \Big[(\underline{x}^2 + \underbrace{2\underline{a}\cdot\underline{x}} + a^2)\,\delta_{\mu\nu} - (x_\mu x_\nu + x_\mu a_\nu + x_\nu a_\mu + a_\mu a_\nu) \Big]$$

Kein Beitrag wegen $\int d^3x\, \rho(\underline{x})\, \underline{x} = 0$ (Schwerpunktsbedingung)

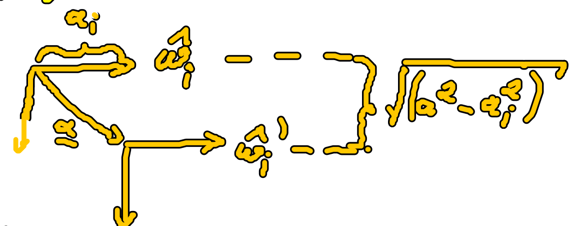
$$= \int d^3x\, \rho(\underline{x}) \Big[(\underline{x}^2 + a^2)\,\delta_{\mu\nu} - (x_\mu x_\nu + a_\mu a_\nu) \Big]$$

$$= \underbrace{\int d^3x\, \rho(\underline{x}) \Big[\underline{x}^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu \Big]}_{J_{\mu\nu}} + \underbrace{\int d^3x\, \rho(\underline{x})}_{M} \Big[a^2 \delta_{\mu\nu} - a_\mu a_\nu \Big]$$

$$= J_{\mu\nu} + M \Big[a^2 \delta_{\mu\nu} - a_\mu a_\nu \Big] \qquad \square$$

Speziell im Hauptachsensystem:

$$J'_i = J_i + M \underbrace{(a^2 - a_i^2)}_{\text{Quadrat des Achsenabstandes}} \qquad (i = 1, \dots, 3)$$



Bsp: (i) Kugelsymmetrische Massendichte $\rho(\underline{x}) = \rho(x)$

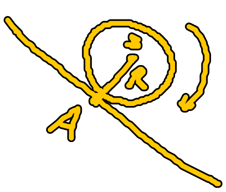
$\Rightarrow J_1 = J_2 = J_3 =: J$ (s. ÜB 13 Aufgabe 3a)

im Allgemeinen: $J = \frac{8\pi}{3} \int_0^R dx\, x^4 \rho(x)$

Bei homogener Massenverteilung $\Big(M = \frac{4\pi}{3} R^3 \underbrace{\rho(x)}_{= \rho} \Big)$ ← homogen

$J = \dots = \frac{2}{5} M R^2$

(ii) Abrollende Kugel



Momentaner Auflagepunkt A

Trägheitsmoment bzgl. momentaner Achse durch A

$$J_A = J + MR^2 \qquad \text{(Steinersche Satz)}$$

$$= \frac{2}{5} MR^2 + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2$$