English summary:

5.2 Properties of inertia tensor (continued)

inertia tensor given for principal axes (mass centroid axes) : diagonal $\underline{\underline{J}}' = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{\underline{R}}^T$

$\Rightarrow$ eigenvalue problem : $\underline{\underline{J}}\,\hat{\underline{\omega}}^{(i)} = \underset{\uparrow \text{ eigenvalue}}{J_i}\,\hat{\underline{\omega}}^{(i)}$ $\leftarrow$ eigenvector , J_i : principal moments of inertia

moment of inertia for given axis $\underline{n}$: $J(\underline{n}) = \underline{n}\,\underline{\underline{J}}\,\underline{n}$, e.g. $\underline{\omega} = \underline{n}\,\omega$: $T = \frac{1}{2}\omega^2 J(\underline{n})$

Parallel axis theorem (Huygens-Steiner theorem):

coordinate system $\bar{K}'$ = coordinate system $\bar{K}$ shifted by vector $\underline{a}$

$$\Rightarrow \quad J'_{\mu\nu} = J_{\mu\nu} + M\left(a^2 \delta_{\mu\nu} - a_\mu a_\nu\right)$$

5.3 Drehimpuls und Bewegungsgleichungen

Drehimpuls:

(A) diskrete Massenpunkte:

Schwerpunktsgeschwindigkeit

$$\underline{l} = \sum_{i=1}^{n} m_i\, \underline{r}_i \times \dot{\underline{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\underline{r}_S + \underline{X}^{(i)}\right) \times \left(\underline{V} + \underline{\omega} \times \underline{X}^{(i)}\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i}_{=M} \left(\underline{r}_S \times \underline{V}\right) + \underbrace{\sum_i m_i \underline{X}^{(i)}}_{=\underline{0}} \times \underline{V} + \underline{r}_S \times \Big(\underline{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \underline{X}^{(i)}}_{=\underline{0}}\Big) + \sum_i m_i \underline{X}^{(i)} \times \left(\underline{\omega} \times \underline{X}^{(i)}\right)$$

$\leftarrow$ Schwerpunktsbed. $\rightarrow$

$$= \underbrace{M\, \underline{r}_S \times \underline{V}}_{\text{Schwerpunkts-drehimpuls}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} m_i \underline{X}^{(i)} \times \left(\underline{\omega} \times \underline{X}^{(i)}\right)}_{\text{Relativdrehimpuls } \underline{L}}$$

(B) Kontinuierliche Massenverteilung $\rho(\underline{x})$:

$$\underline{l} = \ldots = \underline{r}_s \times M\underline{V} + \underbrace{\int d^3x\, \rho(\underline{x})\, \underline{x} \times (\underline{\omega} \times \underline{x})}_{=\underline{L}} \quad , \quad \overset{\text{Gesamtmasse}}{M} = \int d^3x\, \rho(\underline{x})$$

Mit der (bac-cab)-Regel $\left(\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})\right)$ folgt:

Relativdrehimpuls: $\underline{L} = \int d^3x\, \rho(\underline{x}) \left[x^2 \underline{\omega} - (\underline{x}\cdot\underline{\omega})\underline{x} \right]$

$$= \underline{\underline{J}}\, \underline{\omega}$$

denn in Komponenten gilt: $L_\mu = \sum_{\nu=1}^{3} \underbrace{\int d^3x\, \rho(\underline{x}) \left[x^2 \delta_{\mu\nu} - x_\mu x_\nu \right]}_{=J_{\mu\nu}} \omega_\nu$

Bsp: 1. Komponente: $L_1 = \sum_{\nu=1}^{3} \int d^3x\, \rho(\underline{x}) \left[x^2 \delta_{1\nu} - x_1 x_\nu \right] \omega_\nu$

$$= \int d^3x\, \rho(\underline{x}) \Big[\sum_\nu x^2 \underbrace{\delta_{1\nu}\omega_\nu}_{=\omega_1} - x_1 \underbrace{\sum_\nu x_\nu \omega_\nu}_{\underline{x}\cdot\underline{\omega}} \Big]$$

$$= \int d^3x\, \rho(\underline{x}) \left[x^2 \omega_1 - x_1 (\underline{x}\cdot\underline{\omega}) \right]$$

NB: Im allgemeinen ist $\underline{L}$ nicht parallel zu $\underline{\omega}$, nur falls $\underline{\omega}$ in Richtung einer Hauptträgheitsachse liegt.

Allgemeine Bewegungsgleichungen für Gesamtdrehimpuls:

$$\frac{d}{dt}\underline{l} = \sum_i \underline{r}_i \times \underline{F}_i$$

($\underline{F}_i$: äußere, eingeprägte Kräfte, Resultierende Kraft $\underline{F}(\underline{r}_s) = \sum_i \underline{F}_i$ wirkt auf den Schwerpunkt.)

$$= \sum_i m_i \underline{r}_i \times \frac{\underline{F}_i}{m_i} \qquad \left(\frac{\underline{F}_i}{m_i} = \frac{\underline{F}(\underline{r}_s)}{M} \right)$$

$$= \underline{r}_s \times \underline{F}(\underline{r}_s)$$

Schwerpunktsbewegung: $M\ddot{\underline{r}}_s = \underline{F}(\underline{r}_s)$ (Schwerpunktsimpulssatz)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underline{l} = \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\underline{r}_s \times M\dot{\underline{r}}_s}_{\text{Schwerpunkts-,}} + \underset{\text{Relativ-drehimpuls}}{\underline{L}} \Big) = M \underbrace{\dot{\underline{r}}_s \times \dot{\underline{r}}_s}_{=0} + \underline{r}_s \times \underbrace{M\ddot{\underline{r}}_s}_{\underline{F}(\underline{r}_s)} + \underbrace{\frac{d}{dt}\underline{L}}_{=0} \overset{!}{=} \underline{r}_s \times \underline{F}(\underline{r}_s)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\underline{L} = \underline{0}}$$

zeitliche Ableitung im Koordinatensystem mit raumfesten Achsen K

Transformation von $\frac{d}{dt}$ ins Körperfeste, rotatorisch mitbewegte System $\overline{K}$

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{d}{dt}\right)' + \underline{\omega}\times \qquad \text{(vgl. Kap. 1.9 „Beschleunigte Bezugssysteme")}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\underline{L}} + \underline{\omega}\times\underline{L} = \underline{0}} \qquad \text{mit } \dot{} \mathrel{\hat{=}} \left(\frac{d}{dt}\right)'$$

Mit $\underline{L} = \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega}$ folgt im Körperfesten System:

$$\boxed{\underline{\underline{J}}\,\dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega}\times\underline{\underline{J}}\,\underline{\omega} = 0}$$

Eulersche Gleichungen für kräftefreien Kreisel (im Schwerpunktssystem)

($\dot{\underline{\underline{J}}} = 0$, nichtlineare Differenzialgleichungen in $\underline{\omega}$)

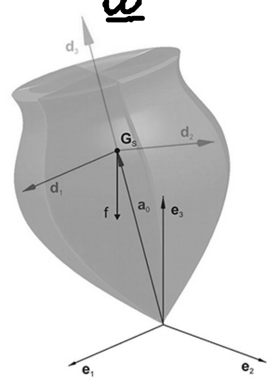
Im Hauptträgheitsachsensystem: $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix}$

(1) $J_1\,\dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3)\,\omega_2\,\omega_3$

(2) $J_2\,\dot{\omega}_2 = (J_3 - J_1)\,\omega_3\,\omega_1$

(3) $J_3\,\dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2)\,\omega_1\,\omega_2$

$\underline{\omega}^{(3)}$



Bsp.: symmetrischer Kreisel ($J_1 = J_2 \equiv J \neq J_3$)

(3) $\Rightarrow \dot{\omega}_3 = 0$ (wegen $J_1 - J_2 = 0$)

$\Rightarrow \omega_3 = \text{const}$ im mitrotierenden System

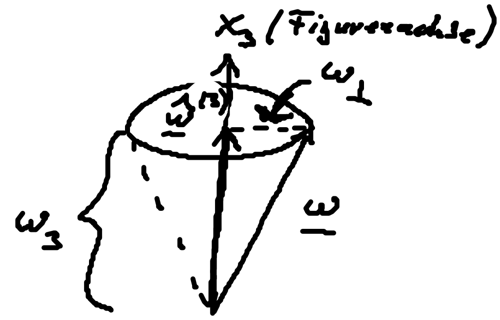
(1) $\Rightarrow J\dot{\omega}_1 = (J - J_3)\,\omega_2\,\omega_3$

$\Rightarrow J\ddot{\omega}_1 = (J - J_3)\,\dot{\omega}_2\,\omega_3 + (J - J_3)\,\omega_2\,\underbrace{\dot{\omega}_3}$

$$\overset{(2)}{=} (J - J_3)\underbrace{\left(\frac{J_3 - J}{J}\right)\omega_3\,\omega_1}_{=\dot{\omega}_2}\;\overset{=0}{\omega_3}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\omega}_1 = -\left(\frac{J - J_3}{J}\,\omega_3\right)^2 \omega_1 \qquad \text{(harmonische Schwingung)}$$

Lösung: $\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_\perp \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ \omega_2 &= -\omega_\perp \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{aligned}}$, $\omega_0 := \frac{J - J_3}{J}\,\omega_3$, $\omega_\perp$, φ_0 : Anfangskonstanten

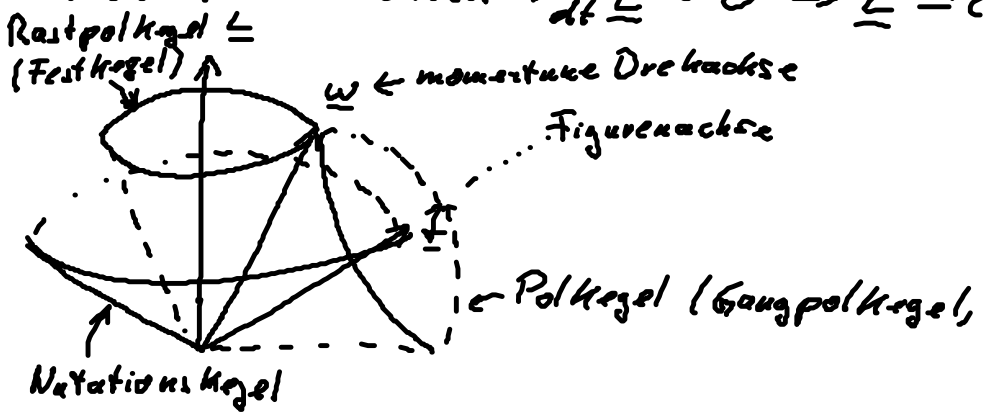


$$\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) = \omega_\perp^2 = \text{const.}$$

$$\omega_1^2(t) + \omega_2^2(t) + \omega_3^2(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \omega_3 = \text{const}}}{=} \omega_\perp^2 + \omega_3^2 = \text{const}$$

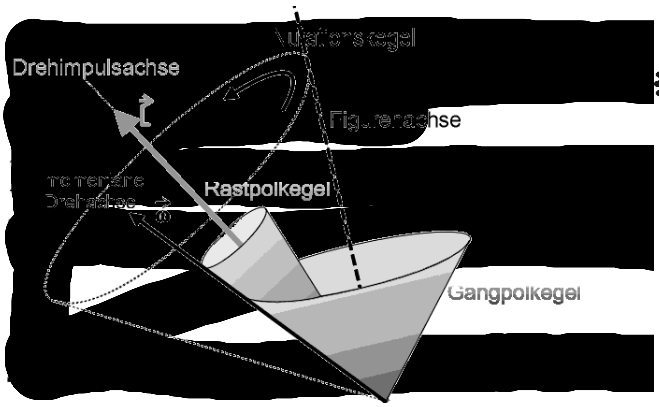
$\underline{\omega}$ und damit auch $\underline{L}$ (wegen $\underline{L} = \underline{\underline{J}}\,\underline{\omega}$, $L_i = J_i \omega_i$) rotieren um die Figurenachse $\underline{f} \parallel x_3$.

Geometrische Veranschaulichung im Schwerpunktssystem mit raumfesten Achsen : $\frac{d}{dt}\underline{L} = 0 \Rightarrow \underline{L} = \text{const.}$

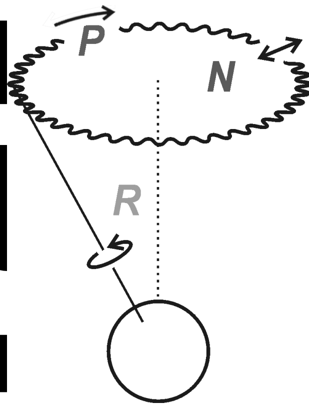


$\underline{\omega}$, $\underline{f}$, $\underline{L}$ stets in 1 Ebene

$\underline{\omega}$ und $\underline{f}$ präzidieren um die raumfeste $\underline{L}$-Achse



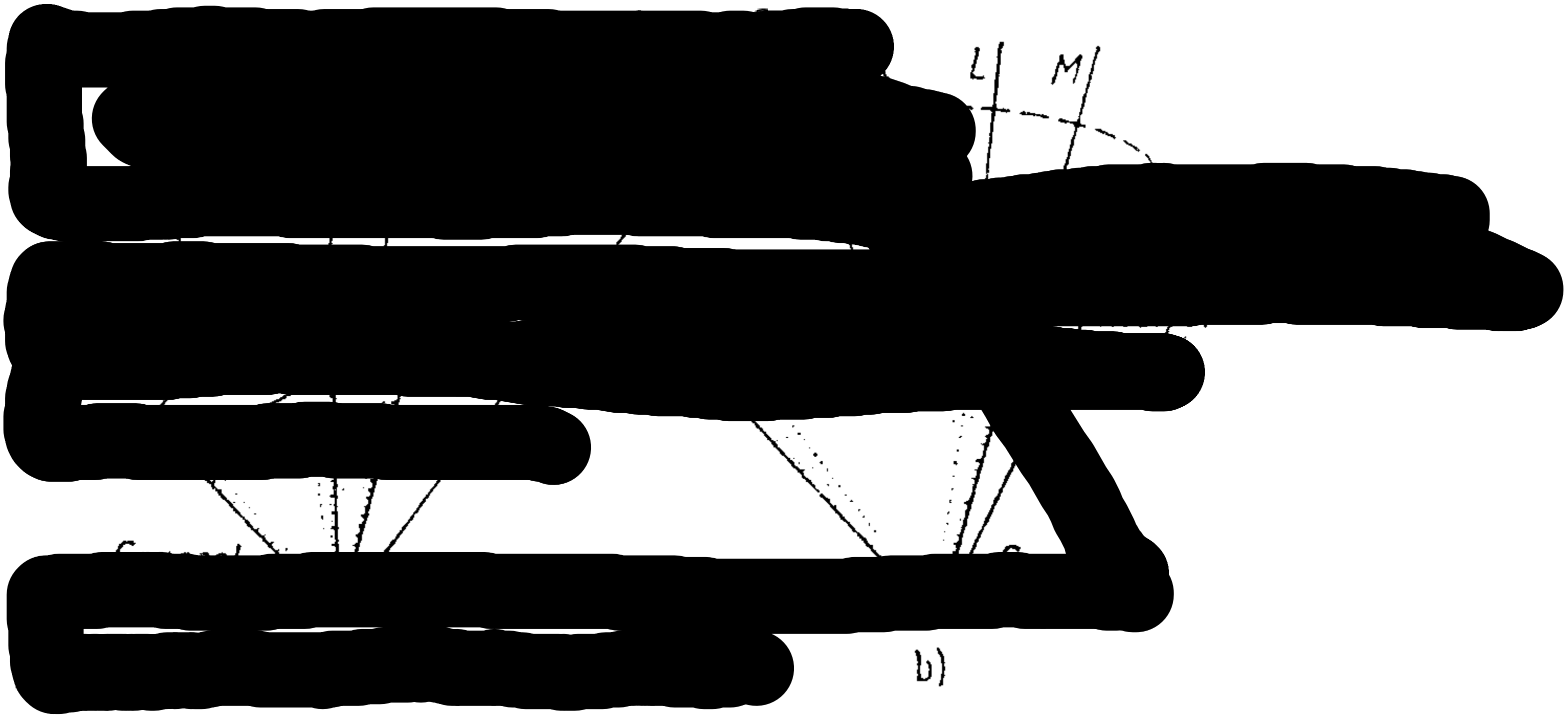
[redacted]



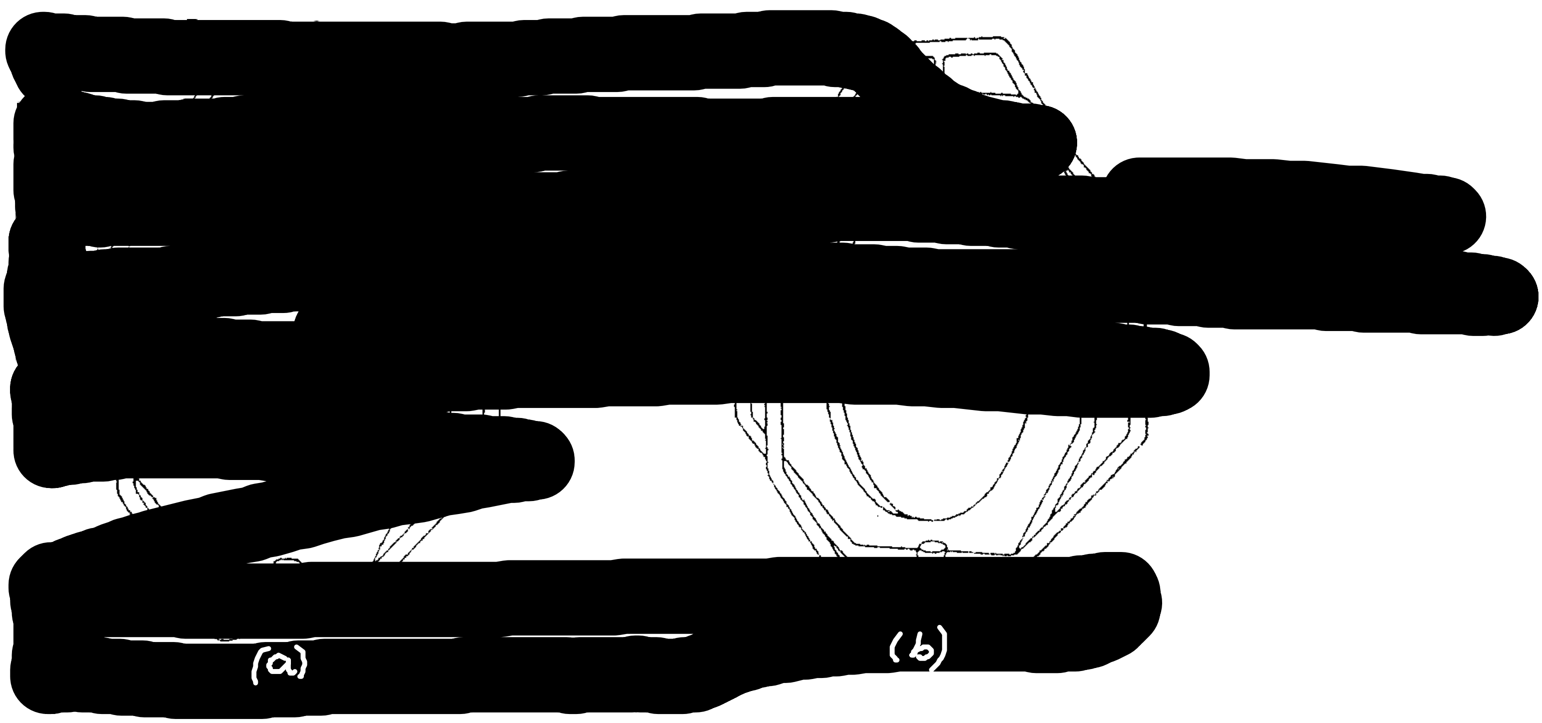
Präzession

Nutation

[redacted]



[redacted]



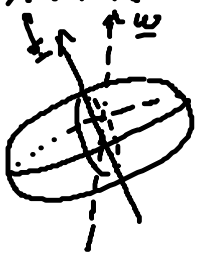
(a) abgeplattete Kreisel:

(b) verlängerten Kreisel:

geometrische Figurenachse
$\hat{=}$ Hauptträgheitsachse mit dem
größten Trägheitsmoment

geometrische Figurenachse
$\hat{=}$ Hauptträgheitsachse mit dem
kleinsten Trägheitsmoment

Anwendung: Erdrotation (Erde als abgeplattetes Rotationsellipsoid)



$\underline{\omega} \nparallel \underline{L}$

$$\frac{J_3 - J}{J} \approx \frac{1}{300} \quad , \quad \frac{2\pi}{\omega_3} = 1 \text{ Tag}$$

$\Rightarrow$ Präzessionsperiode $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 300$ Tage