

Wh: Biot-Savart

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3}$$

$$= \nabla_{\underline{r}} \times \underline{A}(\underline{r})$$

Vektorpotential

wg. $\text{div}(\text{rot } \underline{A}) = 0$

$$\rightarrow \nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}) = 0 \quad !$$

mit

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\underline{r}} \times \underline{B}(\underline{r}) &= \dots = -\Delta_{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r}) \\ &= \dots = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r}) \end{aligned}$$

Nachbemerkung zum Vektorpotential

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$$

Eichtransformation:

$$\underline{A}(\underline{r}) \rightarrow \underline{A}'(\underline{r}) = \underline{A}(\underline{r}) + \nabla \varphi(\underline{r})$$

$$\underline{B}'(\underline{r}) = \nabla_{\underline{r}} \times \underline{A}'(\underline{r})$$

$$= \nabla_{\underline{r}} \times \underline{A}(\underline{r})$$

die selbe physikalische Größe?

$$= \underline{B}(\underline{r})$$

da rot grad $\varphi = 0$

Eine spezielle Eichung ist die sogenannte Coulomb-Eichung

$$\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}) = 0$$

das hatten wir benutzt um den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \nabla_{\underline{r}} \times \underline{B}(\underline{r}) &= \mu_0 \underline{j}(\underline{r}) \\ &= -\Delta_{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r}) \quad \text{wobei} \end{aligned}$$

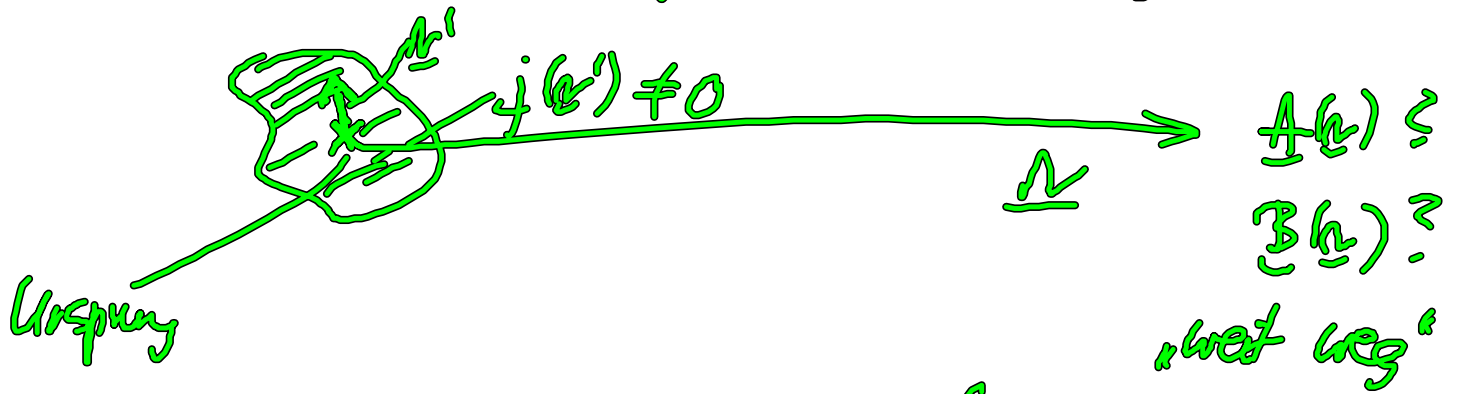
später: Einführung der Lorenz-Eichung

$$\text{denn } \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

und $\Delta_{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r}) = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})$

III.5. Magnetische Multipole

betrachte räumlich begrenzte Stromverteilung



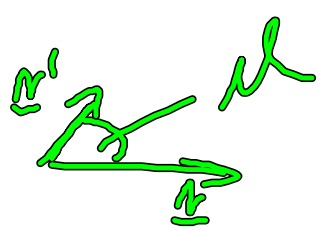
⇒ Betrachte also $A(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} dV' \frac{j(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$

für $r \gg r'$ ⏟ innerhalb des Gebiets da
⏟ schädlisch
 $\Leftrightarrow \frac{r'}{r} \ll 1$

Vorgehensweise analog zu Elektrostatik!

⇒ Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$
in Potenzen von $\frac{r'}{r}$

Betrachte nun die ersten beiden Terme



$$\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \cos \alpha \left(\frac{r'}{r} \right) + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{r \cdot r'}{r^3} + \dots$$

$$\left[\begin{array}{l} r \cdot r' = r r' \cos \alpha \\ \Rightarrow \cos \alpha = \frac{r \cdot r'}{r r'} \end{array} \right.$$

Einsetzen in den Ausdruck für $\underline{A}(\underline{r})$

$$\rightarrow \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3 r' \underline{j}(\underline{r}')$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{A}^{(0)}(\underline{r})}$$

Multipolbeitrag

$$+ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int d^3 r' (r \cdot r') \underline{j}(\underline{r}')$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\underline{A}^{(2)}(\underline{r})}$$

Dipolbeitrag

+

Zum Monopol-Beitrag

betrachte k -te Komponente des Vektors \underline{r}'

$$\underline{\nabla}_{r'} \cdot (x_k' j(r'))$$

$$= \cancel{x_k' \underline{\nabla}_{r'} j(r')} + j(r') \cdot \underline{\nabla}_{r'} x_k'$$

Produktregel

Nicht wg. Kontinuitätsgl.
 $\nabla_j = 0$

$$= j(r') \cdot \underline{\nabla}_{r'} x_k' - j_k(r')$$

Einheitsvektor in Richtung k

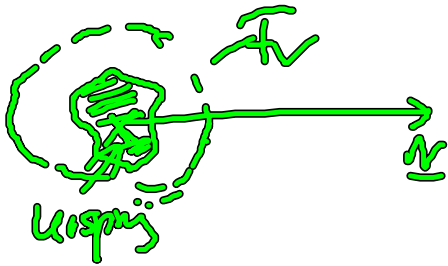
also

$$A_k^{(0)}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V d^3r' j_k(r')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d^3r' \underline{\nabla}_{r'} \cdot (x_k' j(r'))$$

$$\text{Gauss'scher Satz} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^2} \int_{F_V} d\vec{F}' \cdot \underline{x}'_j(\underline{r}') = 0$$

Stromdichte Null auf F_V



Oberfläche des gesamten Raumes
 $\hat{=}$ Oberfläche eines Gebiets, in dem der Strom schon Null ist

→ Magnetfeldbeitrag zu \underline{A} verschwindet!

Nächster Beitrag

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int d^3r' (\underline{r} - \underline{r}') \cdot \underline{j}(\underline{r}')$$

Ziel: So umformen, dass Beitrag den Ausdruck des elektrostatischen Dipols ähnelt

• betrachte Hilfsformel

$$\left. \begin{aligned} (\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')) \times \underline{r} &= (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}') \\ &\quad - (\underline{j}(\underline{r}') \cdot \underline{r}) \underline{r}' \end{aligned} \right\}$$

$$= 2 \underline{\underline{(\underline{r} \cdot \underline{r}') j(\underline{r}')}} + \left[(\underline{r}' \cdot \underline{r}) \underline{j}(\underline{r}') + (\underline{j}(\underline{r}') \cdot \underline{r}) \underline{r}' \right]$$

• in $A^{(A)}$ eingesetzt:

$$A^{(A)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \int d^3r' (\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')) \times \underline{r} + \\ + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \int d^3r' \left[(\underline{r}' \cdot \underline{r}) \underline{j}(\underline{r}') + (\underline{j}(\underline{r}') \cdot \underline{r}) \underline{r}' \right]$$

• der zweite Term ist Null, denn

$$\underline{\nabla}' \cdot \left[x_k' (\underline{r}' \cdot \underline{r}) \underline{j}(\underline{r}') \right] = \left(\underline{\nabla}' x_k' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \right) \underline{j}(\underline{r}') \\ + x_k' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underbrace{\underline{\nabla}' \cdot \underline{j}(\underline{r}')}_{=0}$$

$$= \underbrace{(\underline{\nabla}' x_k')}_{\underline{e}_k} \underline{r} \cdot \underline{r}' \underline{j} + x_k' \underbrace{\underline{\nabla}' (\underline{r} \cdot \underline{r}')}_{\underline{r}} \underline{j}(\underline{r}') \\ = (\underline{r}' \cdot \underline{r}) \underline{j}_k(\underline{r}') + x_k' \underline{r} \cdot \underline{j}(\underline{r}')$$

• Also: $\int d^3r' \left[(\underline{r}' \cdot \underline{r}) \underline{j}(\underline{r}') + (\underline{j}(\underline{r}') \cdot \underline{r}) \underline{r}' \right]$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r' \underline{\rho}' [x_k (\underline{r}' \cdot \underline{r}) \underline{j}(\underline{r}')] \underline{e}_k$$

Gesamt

$$= \underline{e}_k \oint d\underline{F} \cdot [x_k (\underline{r}' \cdot \underline{r}) \underline{j}(\underline{r}')] = 0$$

hier ist $\underline{j}(\underline{r}') = 0$

- Nur der erste Term bleibt übrig

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \int d^3 r' (\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')) \times \underline{r}$$

- Definiere: magnetische (Dipol-) Moment

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \int d^3 r' \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')$$

vgl. Esaki

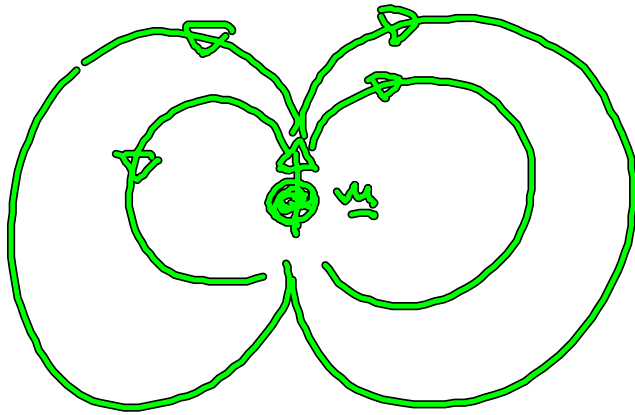
$$\underline{P} = \int d^3 r' \underline{r}' \underline{j}$$

• Dann:

$$\underline{A}(\underline{r}) \approx \underline{A}^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\underline{m} \times \underline{r}}{r^3}$$

• Feld des magnetischen Dipols

$$\underline{B}^{\text{Dip}}(\underline{r}) = \nabla \times \underline{A} \stackrel{\text{AD}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\underline{r} \cdot \underline{m})\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{m}}{r^3} \right)$$

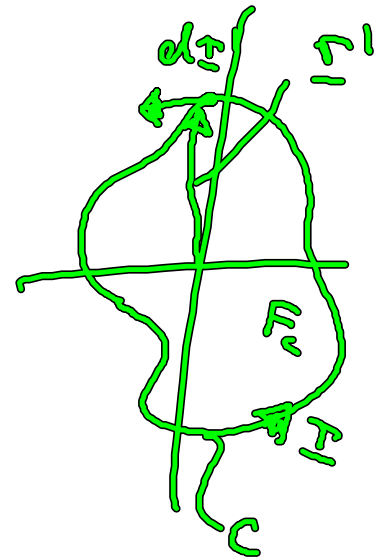


• Beispiele für das magnetische Moment

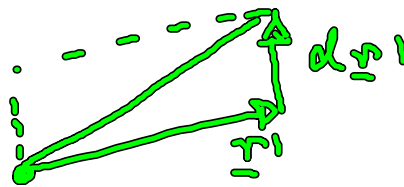
(a) ebene Leiterschleife

hier: $\underline{j}(\underline{r}') d^3r' = I d\underline{r}'$

$$\underline{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \underline{r}' \times d\underline{r}'$$



beachte:



$$|\underline{r}' \times d\underline{r}'| = 2dF$$

$$\underline{m} = I \int_C \underline{n} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{Fläche} \\ \text{der Schleife} \end{matrix}$$

Normalenvektor der Schleife

→ m steht senkrecht auf Ebene der Schleife

(b) bewegte Punktladungen

N Teilchen, jeweils mit Ladung q und Masse M Geschw.

Strom: $\underline{j}(\underline{r}') = q \sum_{i=1}^N \delta(\underline{r}' - \underline{R}_i(t)) \underline{v}_i$

\uparrow
Ort des i -ten Teilchens zur Zeit t

↳ $\underline{m} = \frac{1}{2} \int d^3r' \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')$

$= \frac{q}{2} \sum_{i=1}^N \underline{R}_i \times \underline{v}_i$, $\underline{p}_i = M \underline{v}_i$ Impuls

$= \frac{q}{2M} \sum_{i=1}^N \underline{R}_i \times \underline{p}_i$, $\underline{l}_i = \underline{R}_i \times \underline{p}_i$ Drehimpuls

$\underline{m} = \frac{q}{2M} \underline{L}$, $\underline{L} = \sum_{i=1}^N \underline{l}_i$

• Das Verhältnis $\frac{|m|}{|L|}$ berechnet man als gyromagnetisches Verhältnis

• klassisches Ergebnis: $\frac{|m|}{|L|} = \frac{q}{2M}$

gilt auch im atomaren Bereich?
auch für „Bahnbewegung“ der Elektronen um Atomkern

• Abweichung: bei intrinsischen Drehimpuls = Spin

z. B. Spin des Elektrons

$$\frac{|m|}{|S|} \approx \frac{q}{M}$$

Unterschied zum klass. Ergebnis ist ungefähr Faktor 2

III.6 Kraft auf einen magnetischen Dipol im Magnetfeld

• Allgemein: Kraft auf eine Stromverteilung (s. III.3)

$$\underline{F} = \int d^3 r' \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{B}(\underline{r}') \quad \text{---} \quad \underline{j}(\underline{r})$$

- \underline{j} ist wieder lokalisiert bei \underline{r}
- \underline{B} wird von externen Strömen $\underline{j}_{\text{ext}}$ außerhalb der Stromverteilung \underline{j} erzeugt
- Annahme: bei \underline{r} ist \underline{B} nur schwach inhomogen

→ Taylor-Entwicklung:

$$\underline{B}(\underline{r}') = \underline{B}(\underline{r}) + [(\underline{r}' - \underline{r}) \cdot \nabla] \underline{B}(\underline{r}) + \dots$$

vernachlässige höhere Terme

- dies in \underline{F} eingesetzt

$$\underline{F} = \underbrace{\int d^3 r' \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{B}(\underline{r})}_{=0, \text{ da keine Monopole}} + \int d^3 r' \underline{j}(\underline{r}') \times [(\underline{r}' - \underline{r}) \cdot \nabla] \underline{B}(\underline{r})$$

$$= \int d^3 r' \underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r}' \cdot \nabla) \underline{B}(\underline{r}) - \underbrace{\int d^3 r' \underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r} \cdot \nabla) \underline{B}(\underline{r})}_{=0, \text{ da keine Monopole}}$$

- Ziel: bringe ersten Term auf Form des Dipolmoments \underline{m}

• dazu:

$$\underline{r}' \times \underbrace{(\underline{\nabla} \times \underline{B}(\underline{r}))}_{= \mu_0 \underline{j}^{\text{ext}}(\underline{r}) = 0} = \underline{\nabla} (\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r})) - (\underline{r}' \cdot \underline{\nabla}) \underline{B}(\underline{r})$$

$$\Rightarrow (\underline{r}' \cdot \underline{\nabla}) \underline{B}(\underline{r}) = \underline{\nabla} (\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r})) \quad (*)$$

• in Kraft eingesetzt

$$\underline{F} = \int d^3 r' \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{\nabla} (\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r}))$$

$$= - \int d^3 r' \underline{\nabla} \times [\underline{j}(\underline{r}') (\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r}))], \quad \text{da } \underline{\nabla} \times \underline{j}(\underline{r}') = 0$$

$$= - \underline{\nabla} \times \int d^3 r' \underline{j}(\underline{r}') (\underline{r}' \cdot \underline{B}(\underline{r}))$$

nun gleiche Rechnung wie bei Vereinfachung
des $A^{(2)}(\underline{r})$ -Terms in Multipolentwicklung

$$\int d^3 r' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \underline{j}(\underline{r}') = \underline{m} \times \underline{r}$$

$$= - \underline{\nabla} \times (\underline{m} \times \underline{B}(\underline{r}))$$

$$= - \underline{m} \underbrace{(\underline{\nabla} \cdot \underline{B})}_{= 0} + (\underline{m} \cdot \underline{\nabla}) \underline{B}(\underline{r})$$

$$(*) \quad \boxed{\underline{\nabla} (\underline{m} \cdot \underline{B}(\underline{r})) = \underline{F}}$$

Kraft auf
magnetischen Dipol

- Allgemein:

$$\underline{F} = - \underline{\nabla} U(\underline{r})$$

hier: $U(\underline{r}) = - \underline{m} \cdot \underline{B}(\underline{r})$

- Minimierung der potentiellen Energie U führt dazu, dass sich Dipol parallel zum äußeren Feld ausrichtet

→ Kompass