IV. Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik

$\Longrightarrow$ Zeitabhängige Phänomene

IV.1. Zusammenstellung der statischen Gleichungen

Zunächst: Einführung neuer Feldgrößen (im Vakuum)

$$\underline{D}(\underline{r}) = \varepsilon_0 \underline{E}(\underline{r})$$ dielektrische Verschiebung

$$\underline{H}(\underline{r}) = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}(\underline{r})$$ Magnetfeld

Beachte: Diese einfachen Zusammenhänge gelten nicht in realer Materie, sondern nur im Vakuum!

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}) = \rho(\underline{r}) & \nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}) = 0 \\ \nabla \times \underline{E}(\underline{r}) = 0 & \nabla \times \underline{H}(\underline{r}) = \underline{j}(\underline{r}) \end{array}}$$

elektrostat. Felder werden durch ruhende Ladungen erzeugt und sind wirbelfrei

magnetostat. Felder werden durch Ströme erzeugt und sind quellenfrei

stationäre

Bemerkungen

- Lineare Diff.-gleichungen 1. Ordnung $\rightarrow$ Superpositionsprinzip
- Im statischen Fall sind elektrische und magnet. Felder und Phänomene vollständig entkoppelt!
- Die Zusammenhänge sind auch in Materie gültig!
- Potentiale: $\underline{E} = -\nabla_{\underline{r}} \Phi(\underline{r})$, $\underline{B} = \nabla_{\underline{r}} \times \underline{A}(\underline{r})$ — wird sich ändern im dynamischen Fall!
- Aus $\nabla \times \underline{H} = \underline{j}(\underline{r})$ folgt

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{H}) = 0 = \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r})$$

entspricht der Kontinuitätsgleichung für den statischen Fall!

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \underline{j} = 0$$

Ziel nun:

Formulierung der Maxwellgleichungen für zeitabh. Felder

Beachte zunächst:
Die experimentelle Erfahrung zeigt, dass die Gleichung $\nabla\cdot D = \rho$

$$\nabla\cdot B = 0$$

auch im dynamischen Fall gelten!

$$\nabla\cdot \underline{D}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)\,,\quad \nabla\cdot\underline{B}(\underline{r},t) = 0$$

IV.2 Das Faraday'sche Induktionsgesetz

Wir wissen: Stromdichte ($\hat{=}$ bewegte Ladungen) erzeugen magnet. Felder

Frage: Können umgekehrt magnet. Felder auch Ströme erst induzieren?

$\rightarrow$ Faraday'schen Experimente (1831)

Sei F_C eine Fläche (orientiert!) und C sei der Rand der Fläche; $\underline{B}$ sei ein Magnetfeld

$$\Phi = \int_{F_C} d\underline{f}\cdot\underline{B}$$

magnet. Fluss durch die Fläche

Experimentelle Beobachtung

Falls sich Φ zeitlich ändert $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0\right)$ dann wird in C ein elektrisches Feld $\underline{E}(\underline{r},t)$ induziert $\rightarrow$ Stromfluss!

Es gilt:

$$\boxed{\oint_C d\underline{r}\cdot\underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t)}$$

Faraday'sche Induktions-gesetz!

<u>Bemerkungen</u>

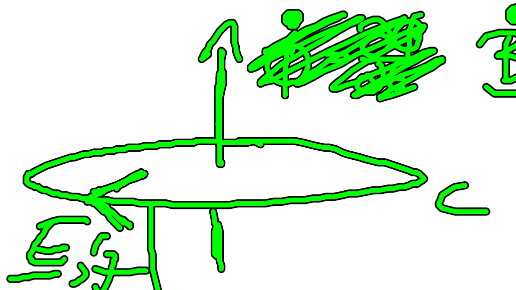
■ Zeitliche Änderung von Φ kann z.B. passieren
- durch Bewegung eines Permanent-Magneten relativ zu C
- Bewegung einer stromdurchflossenen Leiterschleife relativ zu C

■ $\oint_C d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r}) \triangleq$ Induktions-Spannung

(Konsistent mit $[E] = \frac{V}{m}$)

■ Zum Vorzeichen des Stroms

$\dot{\underline{B}} = \frac{\partial B(\underline{r},t)}{\partial t} \Rightarrow \dot{\Phi}$



induzierten Richtung des Feldes $\underline{E}(\underline{r},t)$

Strom in C: $\underline{j}(\underline{r},t) \sim \underline{E}(\underline{r},t)$ (d.h. $\underline{j} \parallel$ zu $\underline{E}$)

Differentielle Formulierung des Faraday'schen Gesetzes

$$\oint_C d\underline{r}\cdot\underline{E}(\underline{r},t) \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{F_C} d\underline{F}\,\left(\nabla\times\underline{E}(\underline{r},t)\right)$$

andererseits

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{F_C} d\underline{F}\cdot\underline{B} = \int_{F_C} d\underline{F}\,\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}(\underline{r},t)$$

Fläche bewegt sich nicht!

$$\rightarrow \boxed{\nabla\times\underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}(\underline{r},t)}$$

Faraday'sches Gesetz

(ersetzt die Gleichung $\nabla\times\underline{E}(\underline{r})=0$ in der Statik)

IV.3. Zur Motivation der Konstanten im Faraday'schen Induktionsgesetz

Ausgangspunkt:

nehme an ! (experimentelle Erfahrung)

$$\oint_C d\underline{r}\cdot\underline{E}(\underline{r},t) = -k\,\dot{\Phi} = -k\,\frac{d}{dt}\int d\underline{F}\cdot\underline{B}$$

Offensichtlich gilt $k=1$, aber warum?
Und warum sind $\underline{E}$ und $\underline{B}$ gekoppelt?

Überlegung:
Die Kurve C bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\underline{v}$ relativ zum Laborsystem (in dem die Fläche fest liegt)

Beachte:
Das Feld $\underline{E}(\underline{r},t)$ auf der linken

Seite des ~~...~~ Induktionsgesetzes ist

das Feld im mitbewegten Bezugsystem

(Ruhesystem von C)

Die zeitliche Änderung von Φ kann durch

2 Arten erfolgen

a) Positionsänderung des Leiterkreises

b) explizite zeitl. Änderung von $\underline{B}$

$$\frac{d}{dt}\underline{B}(\underline{r},t) = -\underbrace{(\dot{\underline{r}}\cdot\nabla)\underline{B}}_{(\underline{v}\cdot\nabla)\underline{B}} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

Formale totale Zeitl. Ableitung

Umschreiben des 1. Terms

benutze:

$$\nabla \times (\underline{B} \times \underline{v})$$

$$= \underbrace{(\underline{v} \cdot \nabla)}_{\text{grad}} \underline{B} \underbrace{- \underbrace{(\underline{B} \cdot \nabla)}_{\text{grad}} \underline{v} + \underline{B} \underbrace{(\nabla \cdot \underline{v})}_{\text{div}}}_{\text{Null, da } \underline{v} \text{ räumlich konstant}} \underbrace{\cancel{- \underline{v} \underbrace{(\nabla \cdot \underline{B})}_{\text{div}}}}_{\text{wg. Maxwell}}$$

$$- \underbrace{(\underline{v} \cdot \nabla)}_{\text{grad}} \underline{B}$$

Kombiniere:

$$\frac{d}{dt} \underline{B}(\underline{r}, t) = \nabla \times (\underline{B} \times \underline{v}) + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

Zeitl. Änderung des Flusses:

$$\frac{d}{dt} \phi = \frac{d}{dt} \int_{F_C} d\underline{F} \cdot \underline{B}(\underline{r}, t) = \int_{F_C} d\underline{F} \cdot \frac{d\underline{B}}{dt}$$

$\uparrow$ Fläche F_C bewegt sich nicht

Stokes $\rightarrow$ $$= \int_C d\underline{r} \cdot (\underline{B} \times \underline{v}) + \int_C d\underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

Kombiniere mit Induktionsgesetz

$$\oint_C d\underline{r} \cdot \left(\underline{E} - k(\underline{v} \times \underline{B}) \right)$$

$$\text{(*)} \qquad = -k \int_C d\underline{f}\, \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\oint_C d\underline{r}\, \underline{E} = -k \frac{d}{dt} \int d\underline{f} \cdot \underline{B}$$

Annahme

Galilei-Invarianz:

Das Induktionsgesetz ist in allen, mit konstanter Geschw. $\underline{v}$ relativ zueinander bewegten Bezugsysteme gleich.

o.k. im nichtrelativistischen Bereich,

d.h. $v/c \ll 1$, aber

streng genommen nicht, wenn $v \to c$!

Außerdem

(*) muß auch dann gelten, wenn $v = 0$; ~~also~~ falls also C im Laborsystem ruht also $\oint_C d\underline{r} \cdot \underline{E}' = -k \int_{F_C} d\underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$

$\underline{v} = 0$

Feld im Laborsystem

Schlussfolgerung (mit Galilei-Invarianz)

$$\Rightarrow \boxed{\underline{E}' = \underline{E} - k\, \underline{v} \times \underline{B}}$$

Feld im Laborsystem

Feld im Ruhesystem (C fixiert)

Verknüpfung der elektrischen Felder ~~$\underline{E}$~~ in zwei relativ zueinander bewegten Bezugssystemen
– involviert das $\underline{B}$-Feld

Was ist nun die Proportionalitätskonstante k?

Betrachte dazu eine einzelne Punktladung q, die in dem bewegten System ruht

Sie erfährt Kraft

$$\underline{F} = q\underline{E}$$ (aus ~~Elektri~~ Elektrostatik)

im Ruhesystem von L

Im Laborsystem bewegt sich die Ladung mit dieser konstanten Geschwindigkeit $\underline{v}$

$\rightarrow$ Strom $\quad \underline{j}(\underline{r}) = q\underline{v}\,\delta(\underline{r} - \underline{R}(t))$

Kraft auf diesen Strom aus dem Magnetfeld $\underline{B}$

$$\underline{F} = \int d^3r\, \underline{j} \times \underline{B} = q\underline{v} \times \underline{B}$$

Anwendung auf Laborsystem

$\Rightarrow$ Gesamtkraft im Laborsystem

$$\underline{F}' = q\underline{v} \times \underline{B} + q\underline{E}'$$

Galilei-Invarianz: Die Kräfte in den beiden Bezugssystemen sollen gleich sein!

$$\Rightarrow \underline{F}' = \underline{F}$$

Laborsystem Ruhesystem

$$\Rightarrow q(\underline{E}' + \underline{v} \times \underline{B}) \stackrel{!}{=} q\underline{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{E}' + \underline{v} \times \underline{B} = \underline{E}}$$

Konstante k muß gleich 1 sein!

IV. 4. Die Maxwell'sche Ergänzung und die endgültigen Gleichungen

Wir haben bisher

(1) $\underline{\nabla} \cdot \underline{D} = \rho$

(2) $\underline{\nabla} \times \underline{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}$

(3) $\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$

(4) $\underline{\nabla} \times \underline{H} = \underline{j}$

im Vakuum

$\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}$

$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}$

noch nicht konsistent!
Das sieht man wie folgt.

Wende auf (4) Divergenz an

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \underline{H})}_{\text{div rot}} = 0 = \nabla \cdot \underline{j}$$

aber: Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \underline{j} = -\frac{\partial \rho(r,t)}{\partial t}$$

Maxwell gelang es, diese Inkonsistenz zu beseitigen
(1865)

Konti.-Gl.:

$$\nabla\cdot \underline{j}(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) = 0$$

benutze $\rho(\underline{r},t) \overset{①}{=} \nabla\cdot \underline{D}(\underline{r},t)$

$$\nabla\cdot\Big(\underline{j}(\underline{r},t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\underline{D}(\underline{r},t)}_{\text{„Ergänzungsstrom"}}\Big) = 0$$

Maxwell'sche Ergänzung

$$\nabla\times\underline{H}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\underline{D}(\underline{r},t)$$

Damit sind die Maxwell-Gl. mit Konti.-Gl. konsistent!

Bedeutung:

Auch ein zeitl. veränderliches elektrisches Feld kann ein Magnetfeld erzeugen

$\widehat{=}$ Umkehrung des Faraday'schen Gesetzes!