ebene Wellen

$$\Box\, u(\underline{r},t) = 0$$

$$u(\underline{r},t) \sim e^{i\underbrace{(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}_{\varphi(\underline{r},t)}}$$

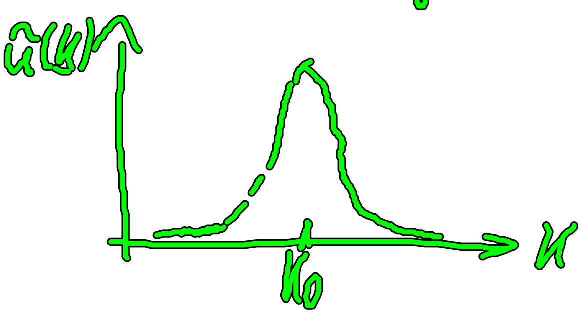
Linearität $\omega = ck$, $k = |\underline{k}|$

$\Rightarrow$ Superposition: Wellenpaket

$$u(\underline{r},t) = \int d\underline{k}\; \underbrace{\hat{u}(\underline{k})}_{\text{Gewichtsfunktion}}\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

dreidimensionales Integral!

in einer Dim.



häufig:
Die Gewichtsfunktion ist "lokalisiert" um einen bestimmten Wellenvektor $\underline{k}_0$

also,
$\hat{u}(\underline{k})$ ist klein für $\underline{k} \neq \underline{k}_0$

$\Rightarrow$ Taylorentwicklung der Phase φ um $\underline{k}_0$

Betrachte die Phase als Fkt. von $\underline{k}$

$$\varphi(\underline{k}) = \underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t \quad \text{mit } \omega = \omega(k)$$

$$\varphi(\underline{k}) \approx \varphi(\underline{k}_0) + \underbrace{(\underline{k}-\underline{k}_0)}_{\Delta \underline{k}} \left(\nabla_{\underline{k}}\, \varphi(\underline{k})\right)\Big|_{\underline{k}=\underline{k}_0} + O\left((\Delta k)^2\right)$$

$$= \underbrace{\underline{k}_0\cdot\underline{r} - \omega(\underline{k}_0)t}_{\varphi(k_0)} + (\underline{k}-\underline{k}_0)\left(\underline{r} - \nabla_{\underline{k}}\,\omega(k)\Big|_{k_0} t\right) + O(\Delta k^2)$$

Definiere jetzt die sogenannte Gruppengeschwindigkeit (für allgemeine Dispersionsrelationen)

$$\underline{v}_g = \nabla_{\underline{k}}\, \omega(\underline{k})\Big|_{\underline{k}=\underline{k}_0}$$

Damit

$$\varphi(\underline{k}) \approx \underline{k}_0\cdot\underline{r} - \omega_0 t + (\underline{k}-\underline{k}_0)(\underline{r} - \underline{v}_g t)$$

Einsetzen in den Ausdruck für das Wellenpaket

$$u(\underline{r},t) = \int d\underline{k}\ \hat{u}(\underline{k})\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

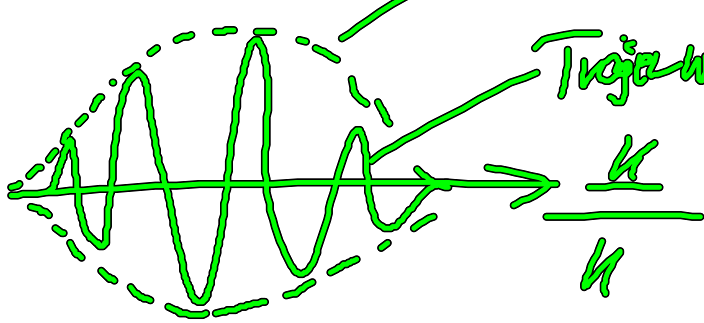
$$\approx \underbrace{e^{i(\underline{k}_0\cdot\underline{r}-\omega_0 t)}}_{\substack{\text{„Trägerwelle" mit Phasen-}\\ \text{geschwindigkeit } \underline{v}_p = \frac{\omega_0}{k_0}}} \underbrace{\int d\underline{\tilde{k}}\ \hat{u}(\underline{k}_0+\underline{\tilde{k}}) \cdot e^{i\underline{\tilde{k}}(\underline{r}-\underline{v}_g t)}}_{\text{„Einhüllende"}} \qquad \underline{\tilde{k}} = \underline{k}-\underline{k}_0$$

Wechsel der Integrationsvariable $\underline{k} \to \underline{\tilde{k}}$

Erinnerung: $\boxed{\underline{v}_p \overset{\text{Def.}}{=} \frac{\underline{k}}{k}\frac{\omega}{k}}$

Maximum bewegt sich mit Gruppengeschwindigkeit

$$\underline{v}_g = (\nabla_{\underline{k}}\, \omega(\underline{k}))_{\underline{k}=\underline{k}_0}$$



beachte: Im hier betrachteten Fall (Vakuum)

$$|v_p| = |v_g| = c$$ Lichtgeschwindigkeit!

Transversalität von Wellen im Vakuum

Betrachte folgende Lösung

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \overbrace{\underline{E}_0}^{\text{Amplitude (mögl. komplex)}} e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{B}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

Frage:

Wie stehen die Vektoren $\underline{k}$, $\underline{E}_0$, und $\underline{B}_0$ relativ zueinander?

$$\nabla\cdot\underline{E} = 0 \qquad \nabla\times\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$

$$\nabla\cdot\underline{B} = 0 \qquad \nabla\times\underline{B} = \frac{1}{c^2}\dot{\underline{E}}$$

einsetzen

$$\nabla \cdot \underline{E} = \nabla \cdot \big(\underbrace{\underline{E}_0}_{\text{const}} e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}\big)$$

$$= \underline{E}_0 \cdot \nabla_{\underline{r}} e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

$$= \underline{E}_0 \cdot i\underline{k} \underbrace{e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}}_{\neq 0} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \underline{k}\cdot\underline{E}_0 &= 0 \\ \underline{k}\cdot\underline{B}_0 &= 0 \end{aligned}}$$

analog $\Rightarrow$

Die Amplituden-Vektoren $\underline{E}_0, \underline{B}_0$ stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung $\underline{k}$

$\Rightarrow$ **Transversal-Wellen**

Beachte:

$\underline{B}$ ist immer Transversalwelle
(da immer $\nabla \cdot \underline{B} = 0$)

aber $\underline{E}$ nicht

(falls $\varrho(\underline{r},t) \neq 0$)

<u>Weitere Folgerung</u>

$$\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0 \implies \left((i\underline{k} \times \underline{E}_0) - i\omega \underline{B}_0 \right) \overbrace{e^{i(\underline{k}\underline{r}-\omega t)}}^{\neq 0} \overset{!}{=} 0$$

Einsetzen $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i\varphi}$

$\underline{B} = \underline{B}_0 e^{i\varphi}$

$$\implies \omega \underline{B}_0 = \underline{k} \times \underline{E}_0$$

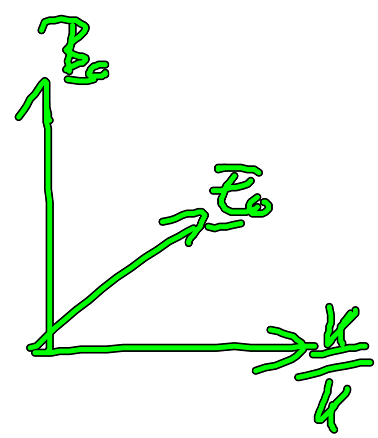
$$\iff \underline{B}_0 = \frac{1}{c} \left(\frac{\underline{k}}{k} \times \underline{E}_0 \right)$$

analog aus

$$\nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c^2} \dot{\underline{E}} = 0$$

$$i\underline{k} \times \underline{B}_0 + i \underbrace{\frac{\omega}{c^2}}_{k/c} \underline{E}_0 = 0$$

$$\implies \underline{E}_0 = -c \left(\frac{\underline{k}}{k} \times \underline{B}_0 \right)$$



$\implies$ $\underline{E}_0$, $\underline{k}$, $\underline{B}_0$ bilden ein orthogonales Rechtssystem

Beispiel

Ausbreitungsrichtung $\frac{\underline{k}}{k} = \underline{e}_z$

Eine mögl. Lösung ist

$$\underline{E}(\underline{r},t) = (E_{0,x}\underline{e}_x + E_{0,y}\underline{e}_y)e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \frac{1}{c}(-E_{0,y}\underline{e}_x + E_{0,x}\underline{e}_y)e^{i(kz-\omega t)}$$

Offensichtlich ist diese elektromagnet. Welle allein durch eine der Vektoren $\underline{E}_0, \underline{B}_0$ (sowie $\underline{k}, \omega$) bestimmt!

V.3 Polarisation ebener Wellen

betrachte genauer (mit $\underline{k} = k\underline{e}_z$)

$$\underline{E}(\underline{r},t) = (E_{0,x}\underline{e}_x + E_{0,y}\underline{e}_y)e^{i(kz-\omega t)}$$

$E_{0,x}$, $E_{0,y}$ sind i. A. komplexe Größe

$$E_{0,x} = a_x e^{i\delta_x}$$
$$E_{0,y} = a_y e^{i\delta_y}$$

mit $a_x, a_y, \delta_x, \delta_y$ reell

Beachte:
Das physikalische $\underline{E}$-Feld ist reell!

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r},t) = E_x(\underline{r},t)\,\underline{e}_x + E_y(\underline{r},t)\,\underline{e}_y$$

mit $E_x = \mathrm{Re}\left(E_{0,x}\, e^{i(kz-\omega t)}\right)$
$= \mathrm{Re}\left(a_x\, e^{i\delta_x + ikz - i\omega t}\right)$

(*) $= a_x \cos(\underbrace{kz-\omega t}_{\varphi} + \delta_x)$

und $E_y = a_y \cos(\underbrace{kz-\omega t}_{\varphi} + \delta_y)$

$$\Rightarrow \frac{E_x}{a_x} = \cos(\varphi + \delta_x) = \cos\varphi\cos\delta_x - \sin\varphi\sin\delta_x$$

Additionstheorem! für cos

$$\frac{E_y}{a_y} = \cos\varphi\cos\delta_y - \sin\varphi\sin\delta_y$$

betrachte

nochmal Additionstheorem

$$① \quad \frac{E_x}{a_x}\sin\delta_y - \frac{E_y}{a_y}\sin\delta_x = \cos\varphi \, \sin(\underbrace{\delta_y - \delta_x}_{\delta})$$

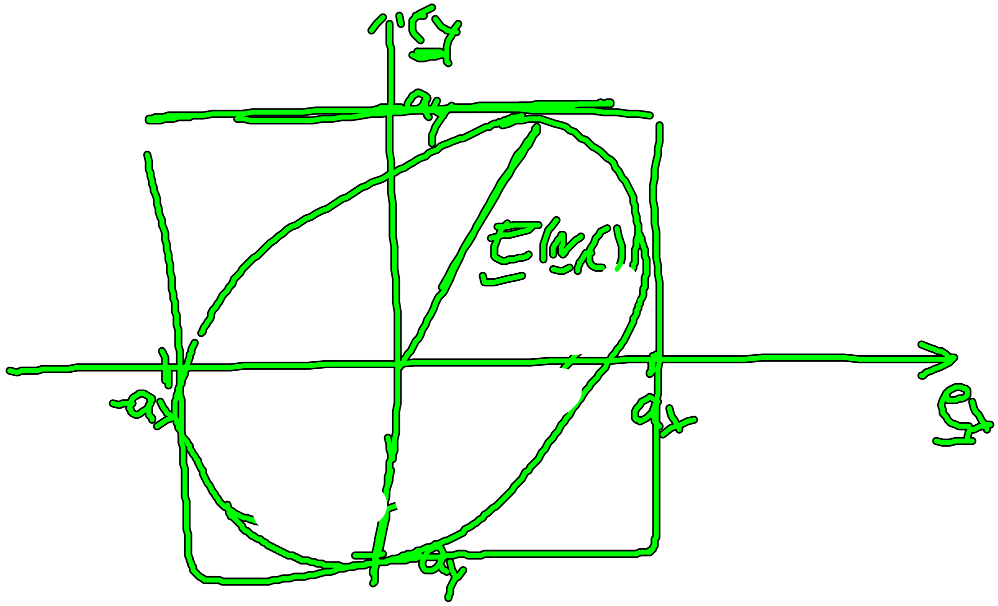
$$② \quad \frac{E_x}{a_x}\cos\delta_y - \frac{E_y}{a_y}\cos\delta_x = \sin\varphi \, \sin\delta$$

Durch Kombination dieser Gleichungen lässt sich $\varphi = kz - \omega t$ und damit die Orts- und Zeitabhängigkeit eliminieren!

$$①^2 + ②^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 - 2\,\frac{E_x}{a_x}\frac{E_y}{a_y}\cos\delta = \sin^2\delta}$$

Dies ist eine Ellipsengleichung für E_x und E_y!



<u>Interpretation:</u>

Der Vektor läuft auf einer Ellipse ~~...~~ um $\underline{k}$ herum "elliptische Polarisation"

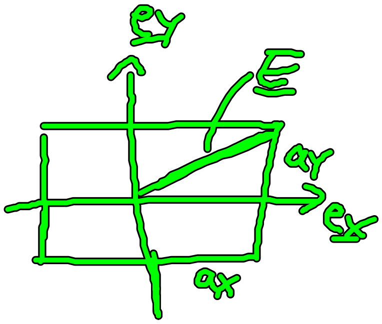
<u>Spezialfälle</u>

a) linear polarisiert Welle

$$\delta = \delta_y - \delta_x = 0 \quad \text{oder} \quad \delta = \pm\pi$$

→ Ellipsengleichung

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 \pm 2\,\frac{E_x}{a_x}\,\frac{E_y}{a_y} = 0$$



$$\boxed{\frac{E_x}{a_x} \pm \frac{E_y}{a_y} = 0}$$

unabhängig von Ort und Zeit

→ Gesamtfeld (siehe auch *)

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \left(a_x\,\underline{e}_x \pm a_y\,\underline{e}_y\right)\cos\left(kz - \omega t + \delta_x\right)$$

$\underline{E}$ schwingt in festen Richtung relativ zu $\underline{k}$!

b) Zirkular polarisierte Welle

$$\delta = \delta_y - \delta_x = \pm\frac{\pi}{2}$$

nehme $a_x = a_y = a$

aus Ellipsengleichung

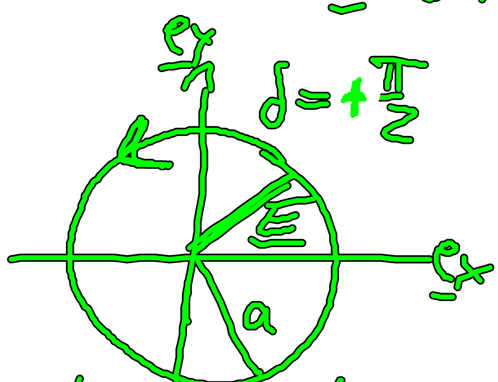
$$E_x^2 + E_y^2 = a^2$$

Kreisgleichung

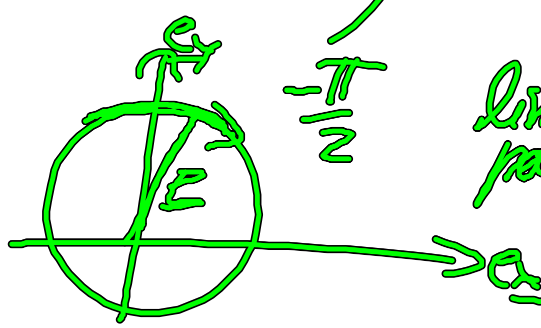
Gesamtfeld

$$\underline{E}(\underline{r},t) = a\cos(kz-\omega t+\delta_x)\,\underline{e}_x + a\cos\left(kz-\omega t+\delta_x \pm \frac{\pi}{2}\right)\underline{e}_y$$

$$= a\left(\cos(kz-\omega t+\delta_x)\,\underline{e}_x \pm \sin(kz-\omega t+\delta_x)\,\underline{e}_y\right)$$



rechts polarisiert



links polarisiert

Zirkular polarisierte Welle entspricht einer Überlagerung zweier linear polarisierter Wellen, die um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben sind!

V.5. Energie von Vakuum-Wellen

Betrachte Welle

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underbrace{\underline{E}_0}_{\text{reell}} \cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$$

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \underbrace{\underline{B}_0}_{\text{reell}} \cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$$

mit $\underline{B}_0 = \frac{1}{c} \frac{\underline{k}}{k} \times \underline{E}_0$

Energiedichte

$$w(\underline{r},t) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\underline{B}(\underline{r},t)\right)^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 \frac{1}{c^2}$$

$$\boxed{\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2$$

$$= \varepsilon_0\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2$$

Poyntingvektor

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$$

$$= \underline{E} \times \frac{1}{\mu_0} \underline{B}$$

$$= \frac{1}{c\mu_0} \underline{E} \times \left(\frac{\underline{k}}{k} \times \underline{E} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(\underline{E} \right)^2 \frac{\underline{k}}{k}$$

Kombiniere mit Ausdruck für die Energiedichte

$$\boxed{\underline{S}(\underline{r}, t) = w(\underline{r}, t) \; c \frac{\underline{k}}{k}}$$

analog Magnetostatik

$$\underline{j}(\underline{r}) = \rho(\underline{r}) \underline{v}$$

dyn. $\underline{j}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t) \underline{v}$

mit dieser Perspektive sieht man:

$$\underline{S} = \underbrace{w(\underline{r},t)}_{\text{Energiedichte}} \quad \text{"mal"} \quad \underbrace{c\,\frac{\underline{k}}{k}}_{\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit}}$$

entspricht tatsächlich einem Strom!