

typische Materialbeziehung:

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e \underline{E}(\underline{r}, t) \quad \begin{matrix} \text{Polar} \\ \text{moment} \end{matrix}$$

oder
Suszeptibilität
, Antwortfunktion

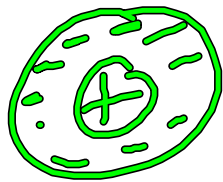
$$\chi_e = 1 + \epsilon$$

↳ Dielektrizitäts
konstante

(allg.: $\underline{P}(\underline{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t dt' \int_{-\infty}^{\underline{r}'} d\underline{r}'' \chi_e(\underline{r} - \underline{r}', t - t') \underline{E}(\underline{r}'', t')$)

Ziel: Einfaches mikroskop. Modell
für $\chi_e = 1 + \epsilon$ (statisch)

Betrachte nur 1 Atom ohne permanentes Dipolmoment!
aber: Externes Feld kann Dipolmoment induzieren!



ohne Feld



Ladungstrennung

→ induziertes Dipol

Wir hatten bereits:

Newton'sche Bewegungsgl. für den Kern

$$m_H \ddot{r}_H = F_H + Q_H E \quad \text{extern}$$

↳ Kraft durch die Elektronen!

$$Q_H = Ze$$

↳ Kernladungszahl

$$F_H - Q_H E_e(r_H) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} (r_H - r_e)$$

Feld da die Elektronen produziert!

Dabei R : Radius des Atoms

r_e : Schwerpunkt der negativen Ladung

(Annahme: homogen geladene Kugel!)

$$F_H = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \quad (\text{mit } r = r_H - r_e)$$

linear in r !

analog g . für Elektronen:

$$\underbrace{Zm_e}_{\text{Masse}} \ddot{r}_e = \dots = F_e + Q_e E \quad \text{extern}$$

↳ $= -F_H$

Nehme, dass $m_H \gg Zm_e$

gleiches Verhalten:

→

$$\ddot{\underline{r}} = -\frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \underline{r} + \frac{ze}{2m_e} \underline{E}^{\text{extern}}$$

Führe ein: $\omega_0^2 = \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 m_e R^3}$

$$\Rightarrow \ddot{\underline{r}} + \omega_0^2 \underline{r} = \frac{e}{m_e} \underline{E}^{\text{extern}}$$

Das ist ein harmonischer Oszillator

Stationärer Zustand: $\dot{\underline{r}} = 0$, $\ddot{\underline{r}} = 0$

$$\Rightarrow \omega_0^2 \underline{r} = \frac{e}{m_e} \underline{E}^{\text{extern}}$$

$$\underline{r} = \frac{e}{m_e \omega_0^2} \underline{E}^{\text{extern}}$$

$\underline{r}_H = \underline{r}_e$

gleichzeitige Wirtsposten der Ladungsdichtepunkte
relativ zueinander

Zugehöriges (durch das Feld induziertes) Dipolmoment

$$p = \text{Ladung} \times \underline{L}$$

$$= Ze_0 \underline{L}$$

(Dimension Ladung \times Ort)

$$p = \int d^3r \rho(\underline{r}) \cdot \underline{L}$$

$$p = Ze_0 \frac{e_0}{m_e \omega_0^2} \underline{E}^{\text{extern}}$$

$$\approx 4\pi R^3 \epsilon_0 \underline{E}^{\text{extern}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{Ze^2}{4\pi \epsilon_0 m_e R^3}$$

definiere die "mikroskopische Polarisierbarkeit" des Atoms

$$\alpha = \frac{Ze^2}{\epsilon_0 m_e \omega_0^2} = 4\pi R^3 = 3 V_{\text{Atom}}$$

$$\Rightarrow p = \epsilon_0 \alpha \underline{E}^{\text{extern}}$$

Vergleichen
für viele (nicht wechselwirkende) Atome

$$\underline{P} = n \overset{\text{Teilchendipol}}{p} = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}^{\text{extern}}$$

makroskop.
Polarisation \swarrow

Kongruent mit unserer
früheren Definition.

hier:
$$n = \frac{N}{\Delta V}$$

$$p_i = p$$

$$P = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} P_{\text{mikro}}(\mathbf{r}+\mathbf{s})$$
$$\Downarrow$$
$$\sum_{i=1}^N p_i d(\mathbf{r}+\mathbf{s})$$

Normal

$$P = \epsilon_0 n \alpha \underline{E}^{\text{ext}}$$

Erwartung:
$$P = \epsilon_0 \chi_e \underline{E}$$

Beachte aber:

es gibt nicht unmittelbar $\chi_e = n\alpha$,
denn $\underline{E} \neq \underline{E}^{\text{ext}}$

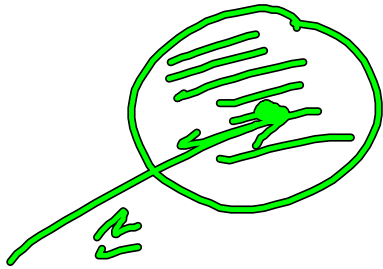
makroskopisches elektr.
Feld im Inneren des Materiekörpers

Frage:

Wie hängt $\underline{E}^{\text{extern}}$ und \underline{E}
Zusammen?

Ansatz (Lorantz)

$$\underline{E}^{\text{lokal}}(\underline{r}) = \underline{E}(\underline{r}) + \underbrace{\underline{E}^{\text{nah}}(\underline{r}) - \underline{E}^{\text{P}}(\underline{r})}_{\text{Korrektur}}$$




Identifiziere zunächst: $\underline{E}^{\text{lokal}}(\underline{r}) = \underline{E}^{\text{extern}}(\underline{r})$
in unserer vorherige
Überlegung
 \Leftrightarrow Feld, was in der Berechnung als
Mikroskop. Analys. einfl.

$\underline{E}^{\text{nah}}$: Beitrag der (induzierten oder
permanenten) Dipole in einer
kugelsymmetrischen Umgebung von \underline{r}

— hängt ~~von~~ ab von der
 mikroscop. Verteilung der
 Nachbarmoleküle

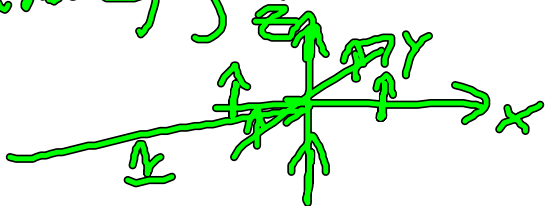
E^P : Feld aus einer Verteilungsexpression,
 in welche nur die Polarisierbarkeit der Kugel
 eingeht:

Man "findet":  $E^{\text{nah}} \approx 0$

in vielen Fällen, zumindest für symmetrische
 Verteilungen

$$E^{\text{nah}} = \sum_{i \text{ innerhalb der Kugel}} \left(\frac{3 p_i (r_i - r) (r_i - r)}{4 \pi \epsilon_0 (r_i - r)^3} - \frac{1 p_i}{4 \pi \epsilon_0 (r_i - r)^3} \right)$$

Überlegung für ein einfaches kubisches Gitter



$$E^{\text{nah}}(r) = 0$$

Für \underline{E}^P findet man (hier durch
Halbierung)

$$\underline{E}^P = -\frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P}$$

$\hat{=}$ Feld im Inneren einer homogen
polarisierten Kugel

(beachte: Das Feld wird gegen
die Polarisation ~~gerichtet~~)



Einsetzen in den Gauß-Ansatz

$$\begin{aligned} \underline{E}^{\text{Gesamt}}(\underline{r}) &= \underline{E}(\underline{r}) + \cancel{\underline{E}^{\text{ind}}(\underline{r})} - \underline{E}^P \\ &= \underline{E}(\underline{r}) + \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P} \quad \text{⊗} \end{aligned}$$

Kombiniere dies mit dem vorherigen Ergebnis

$$\underline{P} = \kappa \varepsilon_0 \underline{E} \quad (1)$$

und mit der Materialgleichung

$$\underline{P} = \chi_e \varepsilon_0 \underline{E} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \underline{P} = \varepsilon_0 \kappa \left(\underline{E} + \frac{1}{3} \underline{P} \right)$$

$$\underline{P} \left(1 - \frac{\kappa}{3} \right) = \varepsilon_0 \kappa \underline{E}$$

$$\Leftrightarrow \underline{P} = \left(\frac{\varepsilon_0 \kappa}{1 - \frac{\kappa}{3}} \right) \underline{E}$$

$$\stackrel{!}{=} \varepsilon_0 \chi_e \underline{E}$$

$$\chi_e = \frac{nk}{1 - \frac{\alpha n}{3}}$$

oder

$$nk = \frac{\chi_e}{1 + \frac{\chi_e}{3}} = 3 \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right)$$

$$= \epsilon + 1$$

Formel von Clausius-Mosotti (1856)

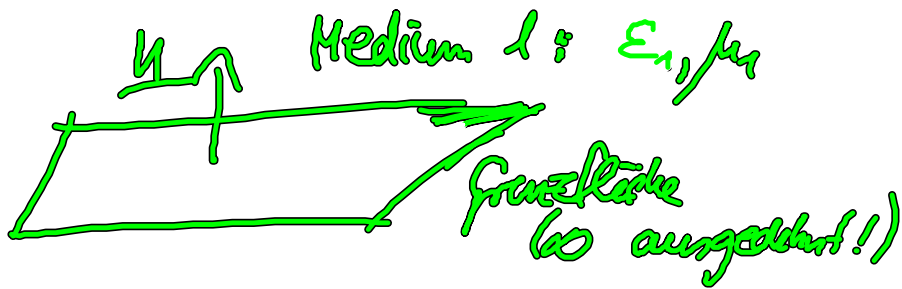
Kopplung mikroskop. Polarizierbarkeit (α)
mit makroskopischer Antwortfunktion!

Bemerkung: ~~Formel~~ χ_e kann divergieren für $\frac{\alpha n}{3} \rightarrow 1$
"Polarisationskollaps"
passiert schon beim Beispiel Wasser unter Normalbedingungen

Dies zeigt, dass die
Clausius-Mosotti-Formel
falsch wird für hochkondensierte Systeme
denn wir hatten nicht wechselwirkende
Teilchen angenommen!

VI. 5. Feldverhalten an Grenzflächen

Frage: Welche Randbedingungen müssen die betrachteten Felder an ~~den~~ Grenzfläche zwischen ~~zwei~~ zwei Medien erfüllen?



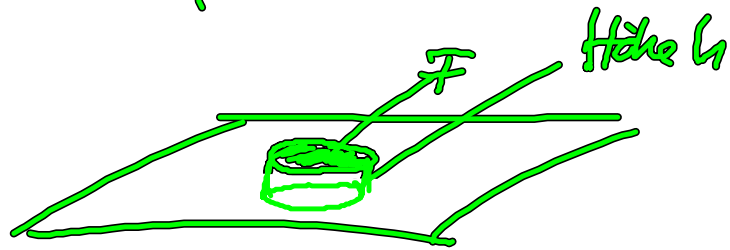
$$\chi_e = \epsilon_r \epsilon_0$$
$$\chi_m = \mu_r \mu_0$$

Medium 2: ϵ_2, μ_2

- ① $\nabla \cdot \underline{B} = 0$
- ② $\nabla \cdot \underline{D} = \rho$
- ③ $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$
- ④ $\nabla \times \underline{H} = \underline{j} + \dot{\underline{D}}$

Integriere ① und ② über ein

Nehmen Volumen (Zylinder), das die
Quersfläche einschließt



aus Messwert am Ende:

- F so klein, dass die Felder darauf als
konstant angenommen werden können
- Höhe $h \rightarrow 0$

aus ①

$$\int_{\text{Zyl.}} \text{div } \underline{F} \cdot \underline{B} = 0 = \int_{F_V} \underline{dF} \cdot \underline{B}$$

F_V Oberfl. des Zylinders

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{B} = \int_{\underline{F}} d\underline{F} (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) \cdot \underline{n} = 0$$

Nur Ober- und Unterfläche tragen bei!

$$\rightarrow (\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}) \cdot \underline{n} = 0$$

d.h. die Normalkomponente von \underline{B} verhält sich stetig!

analog aus ② $\underline{P} \cdot \underline{D} = \rho$

$$\int_{\text{Zyl}} d\underline{V} \underline{P} \cdot \underline{D} = \int_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{D} \stackrel{②}{=} \int d\underline{V} \rho$$

$$\int_{\underline{F}} d\underline{F} (\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)}) \cdot \underline{n} = \lim_{h \rightarrow 0} \int d\underline{V} \rho$$

Annahme: bei $z=0$

Grenzfläche trägt eine Flächenladungsdichte σ

$$\rho(\underline{r}) = \sigma(x, y) \delta(z)$$

Grenzfläche ist die $x-y$ Ebene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\text{Zyl.}} dV \rho(x)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \int dF \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \sigma(x, y) d(\underline{z})$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \int dF \sigma(x, y) = F \cdot \sigma$$

insgesamt

$$\left(\underline{D}^{(1)} - \underline{D}^{(2)} \right) \cdot \underline{n} = \sigma$$

Normal Komponente von \underline{D} macht einen Sprung falls $\sigma \neq 0$

beachte aber:

~~Die~~ Auch für $\sigma = 0$ kann die die Normal Komponente von \underline{E} immer noch unstetig sein!

$$\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$$

$$= \epsilon_0 \underline{E} + \epsilon_0 \chi_e \underline{E}$$

$$= \epsilon_0 (1 + \chi_e) \underline{E} = \epsilon_0 \epsilon \underline{E}$$

also: Annahme $D_n^{(1)} = D_n^{(2)}$, da $G=0$
 $(D_n = \underline{D} \cdot \underline{n})$

$$\Rightarrow \epsilon_0 \epsilon_1 E_n^{(1)} = \epsilon_0 \epsilon_2 E_n^{(2)}$$

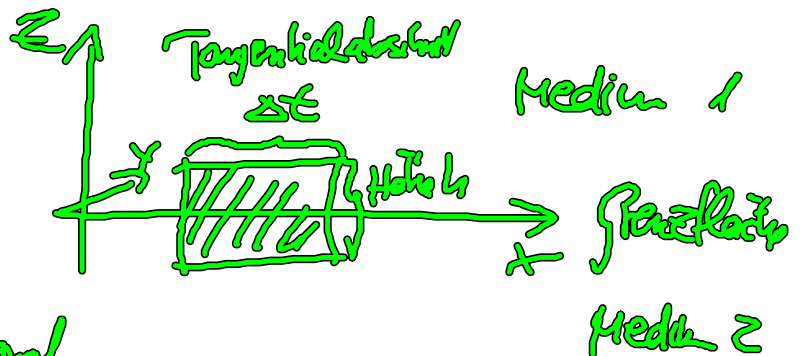
$$\Rightarrow E_n^{(1)} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} E_n^{(2)}$$

Was folgt aus Maxwell-Gl. (3), (4)

aus (3): $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$

$$\int_{\mathcal{F}} d\underline{r} \cdot \nabla \times \underline{E} = \int_{\mathcal{F}} d\underline{r} \cdot \underline{E}$$

Stokes \mathcal{F} Kurvenintegral



$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}} d\underline{r} \cdot \underline{E} = (\underline{E}^{(1)} - \underline{E}^{(2)}) \cdot \underline{\Delta z}$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{!}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \left(- \underbrace{(\text{off} \cdot \dot{\underline{B}})}_{\dot{\underline{B}} \cdot n \cdot \lim_{h \rightarrow 0} F = 0} \right) \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

\Rightarrow Die Tangentialkomponente von \underline{E} bleibt stetig!