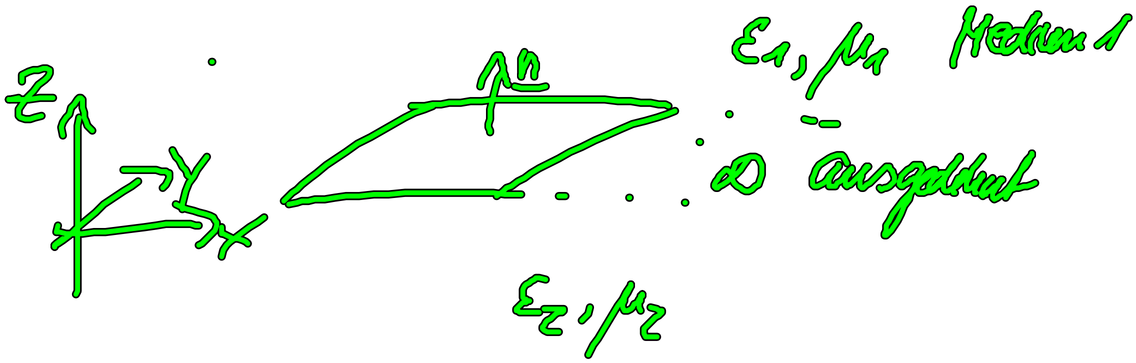


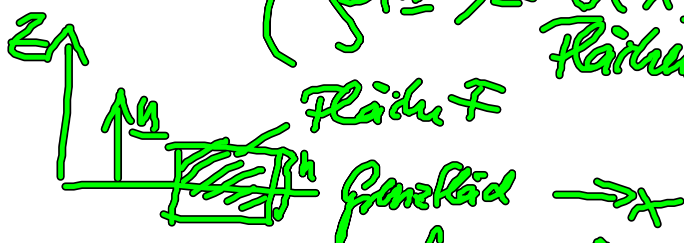
$$\left(\underline{B}^{(1)} - \underline{B}^{(2)}\right)\cdot \underline{n} = 0$$

Normalkomponente von $\underline{B}$ stetig;

$$\left(D^{(1)} - D^{(2)}\right)\cdot \underline{n} = \sigma$$

$$\left(\rho(\underline{r}) = \sigma(x,y)\,\delta(z)\right)$$

Flächenladung



$$\text{rot}\,\underline{E} = -\dot{\underline{B}}$$

$h \to 0$

$$\int d\underline{F}\;\text{rot}\,\underline{E} = -\int d\underline{F}\cdot\dot{\underline{B}} = -\int dF\,\underline{n}\cdot\dot{\underline{B}} = \underline{n}\cdot\dot{\underline{B}}\,F \to 0$$

$$\int d\underline{F}\;\text{rot}\,\underline{E} \overset{\text{Stokes}}{=} \oint_{C_F} d\underline{r}\cdot\underline{E}$$

$$= \left(\underline{E}^{(1)} - \underline{E}^{(2)}\right)\cdot \Delta\underline{z} + O(h)$$

~~ist~~ 0 für $h \to 0$

$$\left(\underline{E}^{(1)} - \underline{E}^{(2)}\right) \cdot \underline{\Delta t} = 0$$

Tangentialkomponente von $\underline{E}$ stetig

$$\mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j} + \dot{\underline{D}}$$

$$\int d\underline{F} \cdot \mathrm{rot}\,\underline{H} = \int_{C_F} d\underline{r} \cdot \underline{H} = \int d\underline{F} \cdot \underline{j} + \int d\underline{F} \cdot \dot{\underline{D}}$$

im Limes $h \to 0$:

$$\int_{C_F} d\underline{r} \cdot \underline{H} = \left(\underline{H}^{(1)} - \underline{H}^{(2)}\right) \cdot \underline{\Delta t}$$

Wegelement in Tangentialrichtung

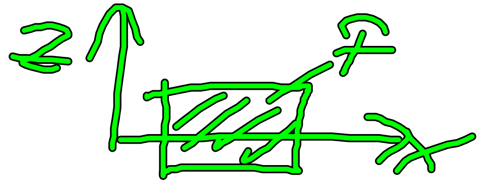
$$\int d\underline{F} \cdot \dot{\underline{D}} = \dot{\underline{D}} \cdot \underline{n} \underbrace{F}_{\substack{\to 0 \\ \text{für } h \to 0}} \longrightarrow 0$$

Zum Stromintegral: Nehme an, die Fläche trage eine „Flächenstromdichte" (analog zur Flächenladungsdichte)

$$\underline{j}(\underline{r}) = \underline{g}(x,y)\,\delta(z)$$

lokalisiert bei $z=0$

$$\int d\underline{F} \cdot \underline{j}(\underline{r})$$



$$= \int dF \; \underline{j} \cdot \underline{n}$$

$$= \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{a}^{b} dx \; \underline{j} \cdot \underline{n} = \int dx \; \underline{g}(x,y)\, \underline{n}$$

$$= \underline{g} \cdot \underline{n} \, \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

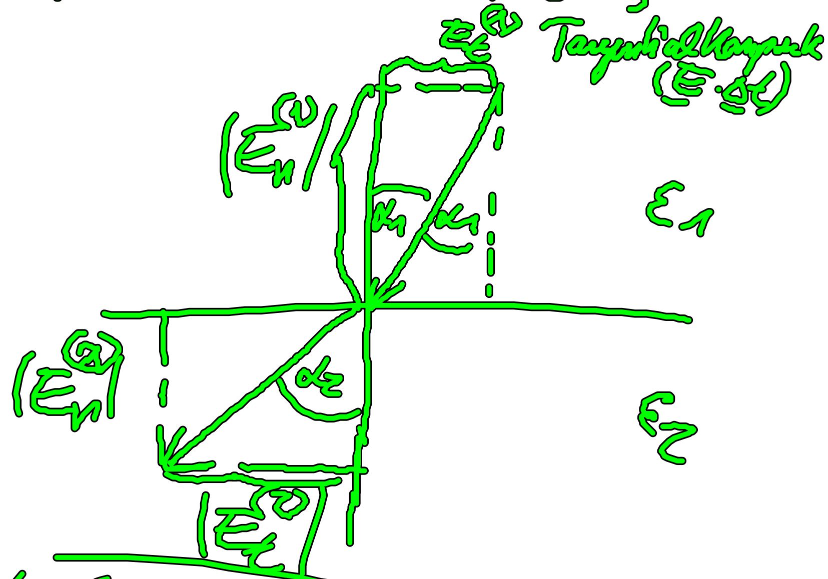
$$\Rightarrow \left(\underline{H}^{(1)} - \underline{H}^{(2)} \right) \cdot \underline{\Delta t} = \underline{g} \cdot \underline{n} \cdot \Delta t$$

Tangential Komponente von H macht einen Sprung, falls Flächenstromdichte vorhanden.

~~Bezieg~~ **Folgerung aus der Stetigkeitsbedingung für $\underline{D} \cdot \underline{n}$**

Grenzfläche zwischen zwei dielektrischen Medien

für $\sigma = 0$



$$\underline{D}^{(1)}\cdot\underline{n} = \underline{D}^{(2)}\cdot\underline{n}$$

$$E_t^{(1)} = E_t^{(2)}$$

$$\varepsilon_1 E_n^{(1)} = \varepsilon_2 E_n^{(2)} \Rightarrow \boxed{E_n^{(2)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_n^{(1)}}$$

$$\sin\alpha_1 = \frac{E_t^{(1)}}{E^{(1)}} \qquad \text{mit } E^{(1)} = |\underline{E}^{(1)}|$$

$$= |\underline{E}_n^{(1)} + \underline{E}_t^{(1)}|$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{E_n^{(1)}}{E^{(1)}}$$

analog für α_2

Stetigkeit von D_n

$$\Rightarrow \tan\alpha_1 = \frac{\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1} = \frac{E_t^{(1)}}{E_n^{(1)}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{E_t^{(2)}}{E_n^{(2)}}$$

Stetigkeit von E_t

$$= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\frac{E_t^{(2)}}{E_n^{(2)}}$$

$$= \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\tan\alpha_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\alpha_1 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\tan\alpha_2}$$

Brechungsgesetz für die Feldlinien von $\underline{E}$ beim Übergang von Medium 1 nach Medium 2 !

wichtig für statische Probleme

$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} < 1 \Rightarrow \tan\alpha_1 < \tan\alpha_2$

da $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2$: Brechung vom Lot weg!

$\underline{\text{VI}}$.6 Freie Wellen in Materie

Betrachte zeitabhängige Lösungen der Maxwell-Gleichungen in Materie, aber ohne freie Ladungen und Ströme ($\underline{j} = 0$, $\rho = 0$)

① $\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$

② $\nabla \cdot \underline{B} = 0$

③ $\nabla \cdot \underline{D} = 0$

④ $\nabla \times \underline{H} - \dot{\underline{D}} = 0$

außerdem

$\underline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \underline{E}$

$\underline{B} = \mu \mu_0 \underline{H}$

(homogenes, isotropes, lineares Medium)

wende Rotation auf ① an.

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \nabla \times \underline{E} &= \nabla(\nabla \cdot \underline{E}) - \Delta \underline{E} \\
&= -\Delta \underline{E} \\
&= -\nabla \times \dot{\underline{B}} \\
&= -\frac{1}{c^2} \varepsilon \mu \ddot{\underline{E}}
\end{aligned}
$$

aus ④

$\nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c^2} \varepsilon \mu \dot{\underline{E}} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \underline{E} - \frac{1}{c^2}\varepsilon\mu \ddot{\underline{E}} = 0}$$

analog aus (4) : $\boxed{\Delta \underline{B} - \frac{1}{c^2}\varepsilon\mu \ddot{\underline{B}} = 0}$

alles analog zum Vakuum-Fall

$\Rightarrow$ Lösungen sind ebene Welle!

generelle Lösung: $\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$

mit $\boxed{\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} k}$ mit $k = |\underline{k}|$

(im Vakuum: $\varepsilon = \mu = 1$)

Definition des Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\omega = \frac{c}{n} k}$

Auch die für den Vakuum-Fall hergeleitete Beziehung für „Transversalität" gelten (mit $c \to \frac{c}{n}$)

$$\underline{k}\cdot\underline{E}_0 = 0$$
$$\underline{k}\cdot\underline{B}_0 = 0$$

$$\frac{\underline{k}}{k}\times\underline{E}_0 = \frac{c}{n}\underline{B}_0 = \frac{\omega}{k}\underline{B}_0$$

$$\frac{\underline{k}}{k}\times\underline{B}_0 = -\frac{n}{c}\underline{E}_0$$

Rechtssystem!

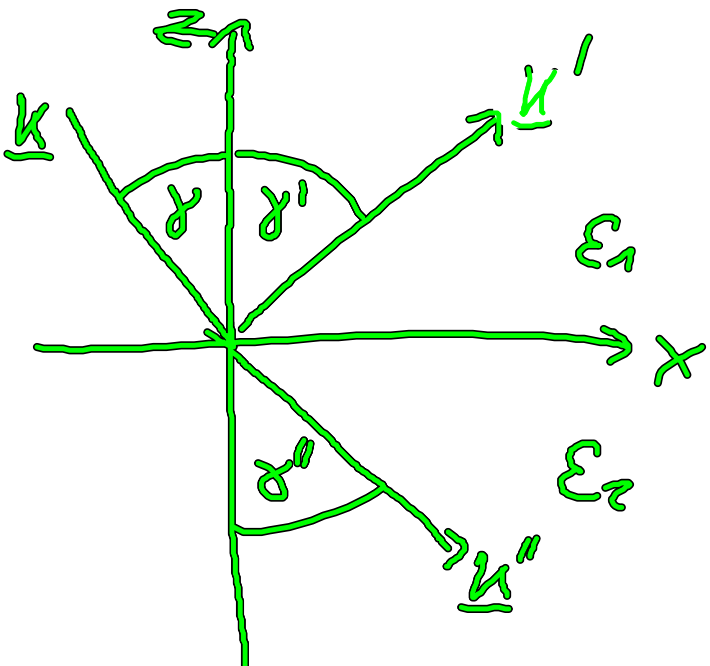
VI.7. Brechung und Reflexion elektromagnetischer Wellen an Materiegrenzflächen

---

Annahme:

- Grenzfläche entspricht der x-y-Ebene liegt bei $z=0$
- keine Flächenladungs(strom-)dichte

- Permeabilitäten $\mu_1 = \mu_2$
- $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$



Einfallende Welle $\quad \underline{E} = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$

reflektierte Welle $\quad \underline{E}' = \underline{E}_0'\, e^{i(\underline{k}'\cdot\underline{r} - \omega' t)}$

transmittierte Welle $\quad \underline{E}'' = \underline{E}_0''\, e^{i(\underline{k}''\cdot\underline{r} - \omega'' t)}$

außerdem: $\underline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \underline{E}$, $\underline{D}' = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \underline{E}'$, $\underline{D}'' = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \underline{E}''$

Dispersionsrelation

$$\omega = \frac{c}{n_1} k \qquad n_1 = \sqrt{\varepsilon_1 \mu}$$

$$\omega' = \frac{c}{n_1} k' \qquad n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu}$$

$$\omega'' = \frac{c}{n_2} k''$$

Setze $\mu = 1$

Die $\underline{B}$-Felder stehen jeweils $\perp$ auf $\underline{E}$ und $\underline{k}$

Grenzbedingungen für die Felder

① $\big(\underbrace{\underline{E} + \underline{E}'}_{\text{Gesamtfeld in Medium 1}} - \underbrace{\underline{E}''}_{\text{Feld in Medium 2}}\big) \cdot \underline{\Delta t} = 0 \qquad \underline{\Delta t} = (x, y, 0)$

② $(\underline{D} + \underline{D}' - \underline{D}'') \cdot \underline{n} = 0\,, \qquad \underline{n} = \hat{\underline{e}}_z$

③ $(\underline{B} + \underline{B}' - \underline{B}'') \cdot \underline{n} = 0$

④ $(\underline{B} + \underline{B}' - \underline{B}'') \cdot \underline{\Delta t} = 0$

Diese Bedingungen müssen an allen Orten auf der Grenzfläche $\underline{r} = (x, y, 0)$ und zu allen Zeiten t erfüllt sein!

$$e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}\Big|_{z=0} = e^{i(\underline{k}'\cdot\underline{r} - \omega' t)}\Big|_{z=0} = e^{i(\underline{k}''\cdot\underline{r} - \omega'' t)}\Big|_{z=0} \quad (*)$$

betrachte $\underline{r} = (0,0,0)$

$$\omega t = \omega' t = \omega'' t$$

$$\Longrightarrow \boxed{\omega = \omega' = \omega''}$$ Frequenzen bleiben ungeändert!

mit Dispersionsrelation: $|\underline{k}'| = |\underline{k}|$

$$|\underline{k}''| = \frac{n_2}{n_1}|\underline{k}|$$

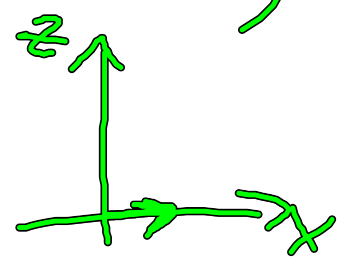
betrachte nun speziell die Zeit $t = 0$

aus $(*)$ $(\underline{k}\cdot\underline{r})\big|_{z=0} = (\underline{k}'\cdot\underline{r})\big|_{z=0} = (\underline{k}''\cdot\underline{r})\big|_{z=0}$

also: Projektion von $\underline{k}$ auf $\underline{r}$ müssen gleich sein für jeden beliebigen $\underline{r}$ in der Grenzschicht

Die drei Wellenvektoren $\underline{k}$, $\underline{k}'$ und $\underline{k}''$ liegen alle in einer Ebene, der sogenannte Einfallsebene

(hier: x-z-Ebene)



Betrachte z.B. $\underline{r} = (x,0,0)$

$$k_x \cdot x = k_x' x = k_x'' x$$

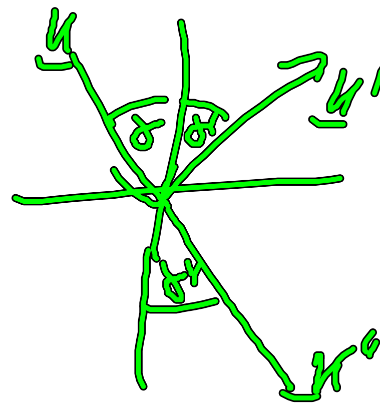
x-Komponente von $\underline{k}$

es gilt:

$$k_x = k \sin\gamma$$

$$k_x' = k' \sin\gamma'$$

$$k_x'' = k'' \sin\gamma''$$



Wir wissen: $k = k'$

da $k_x = k_x'$ folgt: $\boxed{\sin\gamma = \sin\gamma'}$

Reflexionsgesetz
"Einfallswinkel
= Ausfallswinkel"

aufzeichnen:

$$\frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma'} = \frac{|\underline{k}'|}{|\underline{k}''|} = \frac{k'}{k''} = \frac{k}{k''}$$

$$= \frac{n_1}{n_2}$$

$$\boxed{\frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma'} = \frac{n_1}{n_2}}$$

Snellius'sches Brechungsgesetz!

$n_1 < n_2$: Übergang in "optisch dichteres" Medium

$\sin\gamma'' < \sin\gamma$

Ziel nun:
Berechnung der Feldamplitude
$\rightarrow$ Information über Intensität
der reflektierten / transmittierten Welle
relativ zur einfallenden Welle

Man typischerweise 2 Spezialfälle

a) Lineare Polarisation $\perp$ zur Einfallebene
(x-z-Ebene)

$$\underline{E_0} = E_0 \, \hat{\underline{e}}_y$$

b) Lineare Polarisation $\parallel$ zur Einfallebene

Diskutiere hier Fall a)