

Enden
 Äquivalenzprinzip;
 Physik bleibt in allen
 \rightarrow

VII. 4. Folgerungen aus der Lorentztransformation

a) Relativität der Gleichzeitigkeit

es gibt keine absolute Zeit; die Zeit ist eine Funktion des Bezugssystems

Betrachte folgende Situation:

- Im System Σ finden zwei "Ereignisse" (z.B. Ausstrahlung eines Lichtstrahls) an verschiedenen Orten \vec{r}_1, \vec{r}_2 , aber zu derselben Zeit t_1, t_2 statt

$$\text{d.h. } \Delta t = t_1 - t_2 = 0$$

Von Σ' aus gesehen:

$$t_1' = \frac{t_1 - \left(\frac{v}{c^2}\right)z_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Σ und Σ' haben parallele Achsen,
 $v \parallel \vec{e}_z$
 Ursprünge fallen zusammen bei $t=0$

$$t_2' = \frac{t_1 - \left(\frac{v}{c^2}\right)z_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t' = t_1' - t_2' = \frac{\frac{v}{c^2}(z_2 - z_1)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \neq 0$$

In Σ' finden die beiden Ereignisse offensichtlich nicht gleichzeitig statt!

Beispiel

• Σ' $\hat{=}$ Flugzeug, das sich mit Geschw. v relativ zu Σ bewegt

$\Sigma \hat{=}$ Erde (ruht)

• Annahme: Vorder-^(z_1') und Hinterteil des Flugzeugs (Σ') senden gleichzeitig zwei Lichtstrahl aus

→ Diese Lichtstrahlen werden auf der Erde nicht gleichzeitig ankommen!

b) Zeitdilatation

• In Σ werden am selben Ort z
zwei Lichtstrahlen in einem Zeit. Abstand
 $\Delta t = t_1 - t_2$ ausgesendet

• Im bewegten System Σ' kommen die Signale
zu ~~den~~ folgenden Zeiten an

$$t_1' = \gamma \left(t_1 - \frac{vz}{c^2} \right)$$

$$t_2' = \gamma \left(t_2 - \frac{vz}{c^2} \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

\Rightarrow Zeitl. Abstand in Σ' :

$$\Delta t' = t_1' - t_2' = \gamma (t_1 - t_2)$$

$$= \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Rightarrow \Delta t' > \Delta t$$

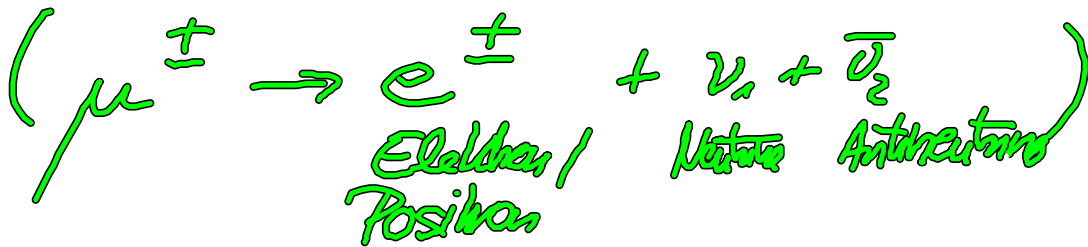
Folgerung:

Zeitintervall erscheint dem bewegten Beobachter
als "gedehnt"
(im bewegten System "gehen die Uhren langsamer")

Man nennt Δt (~~die~~ Zeitintervall
im ruhenden System) die "Eigenzeit"

* Experimenteller Hinweis

z.B. über den Zerfall instabiler μ^\pm -Mesonen



Diese Mesonen entstehen beim Eindringen
kosmischer Strahlung in die Erdatmosphäre

Geschwindigkeit der Mesonen:

$$v (\mu^\pm) \approx 0.994 c$$

↑ Lichtgeschwindigkeit

Man findet:

Die auf der Erde gemessene Zerfallszeit ist sehr viel größer als die im Ruhesystem der Mesonen

Ergebnis:
 $t_W = \gamma \tau_W \approx 9 \tau_W$
auf der Erde gemessene Zerfallszeit

Eigenzeit im Ruhesystem der Mesonen

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$$

typ. Zerfallsgesetz
Zahl der Teilchen
 $\tau = 1$ "Zerfallszeit"

c) Längenkontraktion

betrachtet eine Längenmessung anhand eines Zählrohrs

- Länge im Ruhesystem

$$l = \Delta z = z_1 - z_2$$

• Länge im bewegten System Σ'

$$l' = \Delta z' = z_1' - z_2'$$

$$\rightarrow \gamma \Delta z - \gamma v \underbrace{(t_1 - t_2)}_{\Delta t} = \gamma \Delta z - \gamma v \Delta t \quad (*)$$

Einsetzen des Längentransf.

Wichtig:

Bei der Längenmessung in Σ'
werden die Positionen der Ende
des Zellschleifens gleichzeitig abgelesen!

~~Wichtig~~ \Rightarrow man darf nicht einfach in $(*)$
 $\Delta t = 0$ setzen

(Relativität der Gleichzeitigkeit!)

Richtiger Weg:

betrachte zunächst Zeitunterschied in Σ'

$$t_1' = \left(t_1 - \frac{v}{c^2} z_1 \right) \gamma$$

$$t_2' = \left(t_2 - \frac{v}{c^2} z_2 \right) \gamma$$

$$\Delta t' = t_1' - t_2'$$

$$= \gamma(t_1 - t_2 - \frac{v}{c^2}(z_1 - z_2))$$

$$= \gamma(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta z)$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

da gleichzeitige Messung
in Z' gefordert

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{v}{c^2} \Delta z$$

Einsetzen
in $\textcircled{4}$

$$\Delta z' = \gamma \Delta z - \gamma v \Delta t$$

$$= \gamma \Delta z - \gamma \frac{v^2}{c^2} \Delta z$$

$$= \gamma \Delta z (1 - \frac{v^2}{c^2})$$

$$= \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{\leq 1} \Delta z$$

$$\Rightarrow \Delta z' \leq \Delta z \quad (\text{Längenkontraktion!})$$

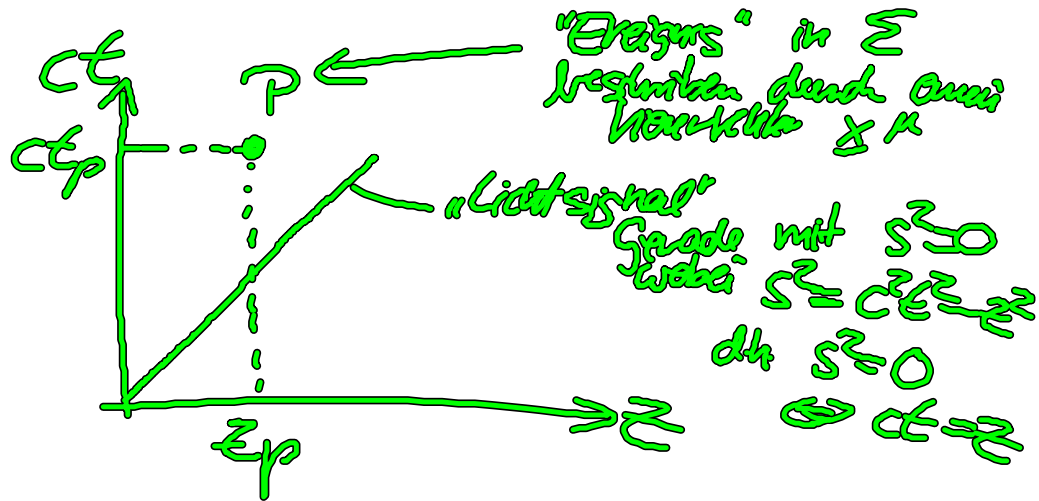
VII. 5. Minkowski-Diagramm

→ Illustration raumzeitlicher Ereignisse

Betrachte wieder Inertialsysteme Σ, Σ'

mit $\underline{v} \parallel \hat{e}_z$, und $\Sigma = \Sigma'$ bei $t=0$

Betrachte Σ



allgemein:

$$S^2 = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

• man unterscheidet Viererfeldern mit folgenden Eigenschaften. (hier $x=y=0$)

$S^2 > 0$: Das gilt für zeitartige Viererfeldern

$S^2 = 0$: "lichtartige" Viererfeldern

$S^2 \subset \mathbb{C}$: raumartige Verteilung

- Weltlinie: ~~kurve~~ Bahnen materieller Teilchen ($v \leq c$)
Verläufe im Raum $S^2 \times \mathbb{R}$

Betrachte nun den Abstand
Zwischen Ereignissen in Σ

$P_1 (ct_1, \underline{x}_1)$ und $P_2 (ct_2, \underline{x}_2)$

Nehme an, dass $(\underline{x}_1 - \underline{x}_2) \parallel \underline{e}_z$

„Raumzeitlicher Abstand“ der ~~zwei~~ Ereignisse?

betrachte den Differenzvektor

$$\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} c(t_1 - t_2) \\ x_1^1 - x_2^1 \\ x_1^2 - x_2^2 \\ x_1^3 - x_2^3 \end{pmatrix}$$

$$S_{12}^2 = c^2 (t_1 - t_2)^2 - |\underline{x}_1 - \underline{x}_2|^2$$

$$s_{12}^2 = c^2 (t_1 - t_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$$

„Raumzeit. Abstand“ der Ereignisse

es folgt:

$$\bullet s_{12}^2 > 0 : c(t_1 - t_2) \geq z_1 - z_2$$

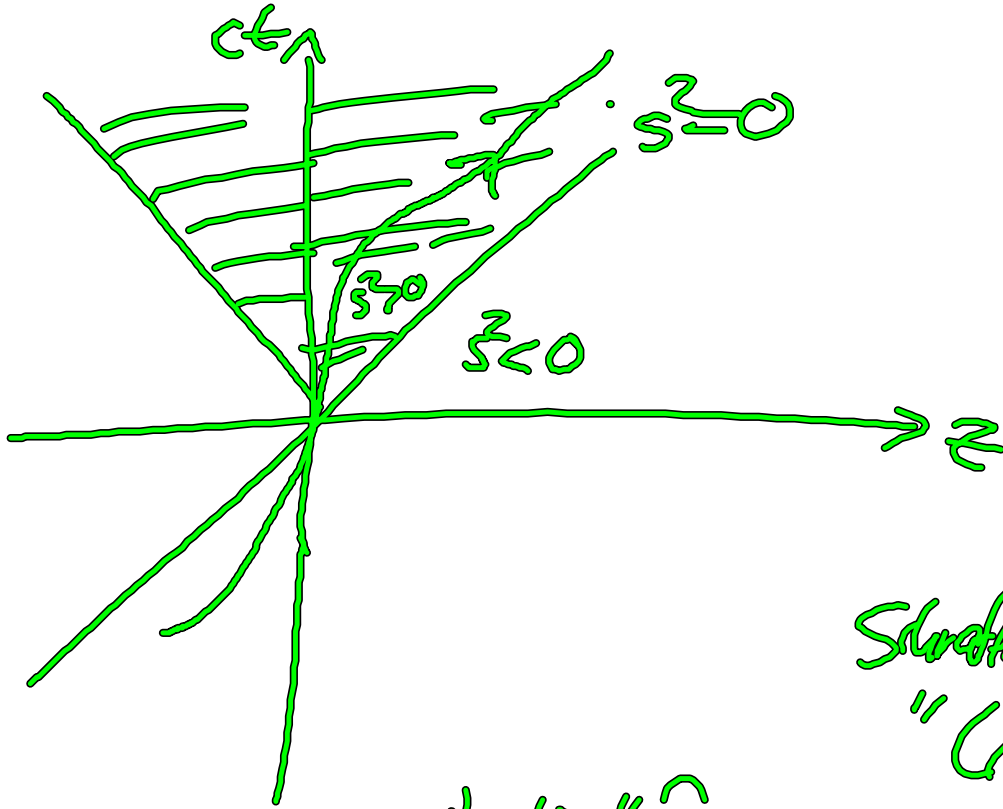
die Ereignisse P_1 und P_2 sind durch ein Lichtsignal „überbrückbar“

⇒ Kausale Kondition
möglich!

(Weltlinien liegen in diesem Bereich des Minkowski-Diagramms)

$$\bullet s_{12}^2 < 0 \quad z_1 - z_2 > c(t_1 - t_2)$$

⇒ P_1 und P_2 sind nicht durch ein Lichtsignal überbrückbar



mit $v \parallel \hat{e}_z$

Einzeichnung des bewegten ~~toten~~ Inertialsystems Σ'

Zeitachse von Σ'

das ist $z' = 0$

aus Lorentz-Transform. $\frac{z - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = 0$

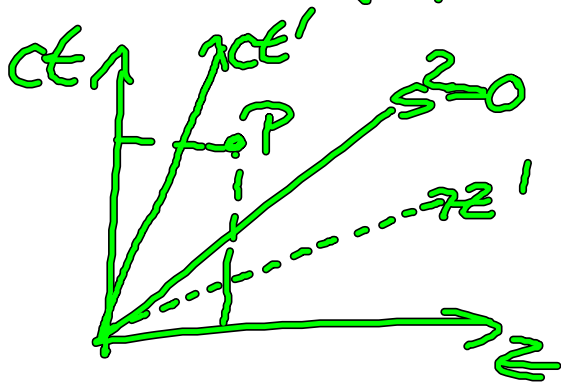
$$\Rightarrow z = vt \Rightarrow t = \frac{z}{v}$$

$$\Rightarrow ct = c \cdot \frac{z}{v} = \beta^{-1} z \quad \beta = \frac{v}{c}$$

\Rightarrow Die Zeitachse von Σ' ist im Minkowski-Diagramm des Systems Σ eine Gerade mit

$$\text{Steigung } \beta^{-1} = \frac{c}{v} \geq 1$$

\Rightarrow Gerade liegt im Lichtkegel!



Raumachse

$$\text{dort ist } t' = 0 \Leftrightarrow \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} z \right) = 0$$
$$\Leftrightarrow ct = \beta z$$

Gerade mit Steigung $\beta \leq 1$

VII. 6. K0 - und K1trafanten
Terschan

bisher Keinelement.

$$\underline{x} / \mu = \begin{pmatrix} c \\ \underline{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

Lorentz transform

$$\begin{matrix} (x')^\mu \\ \text{Komponente} \end{matrix} = \Lambda_\mu + x^\nu$$

allgemeiner

betrachte "Vierertuschen"

k-ter Stufe

$$T \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k$$

Definition:

Bei einer Lorentztransformation der Koordinaten gemäß $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$ transformieren sich die Komponenten des Vierervektors gemäß

$$(T')^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}$$

$$= \Lambda^{\mu_1 \nu_1} \Lambda^{\mu_2 \nu_2} \dots \Lambda^{\mu_n \nu_n} T^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n}$$

Beachte

- Der Vierervektor x^{μ} hat 4 Komponenten
- Die Matrix Λ ist kein Vierervektor; sie beschreibt gerade den Übergang zw. zwei Koordinatensystemen!