Vierertensoren N-ter Stufe (4^N Komponenten)

$$(T')^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} = L_{\mu_1 \lambda_1} L_{\mu_2 \lambda_2} \dots L_{\mu_N \lambda_N} T^{\lambda_1 \dots \lambda_N}$$

Spezialfälle

- $N = 0$: "Vierer-Skalar"

  $4^0 = 1$ Komponente

Beispiel: $s^2 = c^2 t^2 - \underline{r}^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$
$= c^2 t'^2 - \underline{r}'^2$ bleibt invariant unter Lorentztransformation

$N = 1$ „Vierervektor"

(mit $4^1 = 4$ Komponenten)

Hierbei treten 2 Arten auf

a) Kontravarianter Vektor

$$(T)^\mu = (T^0, T^1, T^2, T^3)$$

Indizes hochgestellt!

es gilt:

$$(T')^\mu = L_{\mu\lambda} T^\lambda = \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\lambda} T^\lambda$$

dabei haben wir benutzt, dass die Lorentz-Trafo. <u>linear</u> in den Koordinaten ist, d.h.

$$\frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\lambda} = L_{\mu\lambda}$$

mit $x^\lambda \hat{=} (ct, x, y, z)$

Beispiele
Kontravariante Vierervektoren:

- $x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$
- Differential dx^μ

$$d(x')^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda$$

Kettenregel

$$= \sum_{\lambda=0}^{3} L_{\mu\lambda} dx^\lambda = L_{\mu\lambda} dx^\lambda$$

b) <u>Kovarianter Vierervektor</u>

$$T_\mu = \begin{pmatrix} T_0 \\ T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix}$$

Indizes tiefgestellt!

Transformation der Komponenten

$$(T')_\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial (x')^\mu} T_\lambda$$

$$= \left(\underline{\underline{L}}^{-1}\right)_{\lambda\mu} T_\lambda$$

Beispiel:
Gradient eines skalaren Funktion φ

$$T_\mu = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^0}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \right)$$

$$(T')_\mu = \frac{\partial \varphi}{\partial (x')^\mu} = \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial (x')^\mu}}_{\text{Kettenregel}}$$

$$= \left(\underline{\underline{L}}^{-1}\right)_{\lambda\mu} T_\lambda$$

$\underline{\underline{k=2}}$: Vierertensor 2. Stufe
(mit $4^2 = 16$ Komponenten)

a) Kontravarianter Tensor $T^{\mu\nu}$

$$(T')^{\mu\nu} = L_{\mu\alpha} L_{\nu\beta} T^{\alpha\beta}$$

$$= \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial (x')^\nu}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}$$

b) Kovarianter Tensor $T_{\mu\nu}$

$$(T')_{\mu\nu} = \left(\underline{\underline{L}}^{-1}\right)_{\alpha\mu} \left(\underline{\underline{L}}^{-1}\right)_{\beta\nu} T_{\alpha\beta}$$

c) gemischter Tensor

$$(T')^{\nu}{}_{\mu} = (\underline{\underline{L}}^{-1})_{\alpha\mu} L_{\nu\beta} T_{\alpha}{}^{\beta}$$

Beispiel für c)
Tensorprodukt aus einem ko- und einem kontravarianten Vektor

$$T^{\nu}{}_{\mu} = a^{\nu} b_{\mu}$$

Speziell: $\mu = \nu$

$\Longrightarrow$ Skalarprodukt

Def: gemischter Tensor 2. Stufe mit zwei gleichen Indizes

$$(b, a) \equiv b_{\mu} a^{\mu} = \sum_{\mu=0}^{3} b_{\mu} a^{\mu}$$

ergibt ein (lorentzinvariantes) Skalar!

denn:

$$(b', a') = (b')_\mu (a')^\mu$$

$$= (\underline{\underline{L}}^{-1})_{\alpha\mu} L_{\mu\beta} b_\alpha a^\beta$$

$$= \frac{\partial x^\alpha}{\partial (x')^\mu} \cdot \frac{\partial (x')^\mu}{\partial x^\beta} b_\alpha a^\beta$$

$$= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} b_\alpha a^\beta = \delta_{\alpha\beta} b_\alpha a^\beta$$

$$= b_\alpha a^\alpha = (b, a)$$

Die Def. des Skalarprodukts ist ein Beispiel für die "Verjüngung" eines Tensors

allg.: Verjüngung: Gleichsetzen von 2 Indizes

Tensor k-ter Stufe

$\Longrightarrow$ Tensor (k-2)-ter Stufe

Der metrische Tensor

Wir hatten bereits

$$dx^\mu = \begin{pmatrix} dx^0 \\ dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

Differential des (kontravarianten) Ortsvektors im Minkowski-Raum

zugehörige Längenquadrat

$$ds^2 = {dx^0}^2 - {dx^1}^2 - {dx^2}^2 - {dx^3}^2$$
$$= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

offensichtlich gilt:

$$(*) \quad ds^2 = g_{\mu\lambda}\, dx^\mu dx^\lambda$$

Produkt des kontravarianten Differentialvektors

mit

$$g_{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Kovarianter metrischer Tensor

Andersseits wollen wir das Längenquadrat, das ja ein (~~lorentz~~ invariantes) Skalar ist, als Skalarprodukt schreiben!

$$ds^2 \overset{!}{=} (dx, dx) = dx_\mu dx^\mu \quad (**)$$

Vergleiche (*) und (**)

$\Rightarrow$ es muß gelten:

$$\boxed{dx_\mu \overset{!}{=} g_{\mu\lambda} dx^\lambda}$$

Durch Anwenden des metrischen Tensors kann man einen Kontravarianten in einen kovarianten Vierervektor umwandeln!

(gilt für jeden Vierervektor, nicht nur für dx^μ !!)

Umkehrung

$$dx^\mu \overset{!}{=} \underbrace{g^{\mu\lambda}}_{\text{Kontravarianter metrischer Tensor}} dx_\lambda$$

Einsetzen

$$dx_\mu = g_{\mu\lambda}\, dx^\lambda$$

$$= g_{\mu\lambda}\, g^{\lambda\nu}\, dx_\nu$$

$$\Rightarrow g_{\mu\lambda}\, g^{\lambda\nu} \overset{!}{=} \delta_{\mu\nu}$$

Zusammen mit $g_{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

ergibt sich folgende Eigenschaft:

$$g^{\mu\lambda} = g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$$

Ko- und Kontravariante metrische Tensor sind identisch!

Anwendung auf einen beliebigen Vierervektor, z.B. Ortsvektor in Minkowski-Raum

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$ kovariant

$$= g_{\mu\alpha} x^\alpha$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix}$$

$x^0 = ct$

$(x^1, x^2, x^3) = \underline{r}$

$$= (ct, -\underline{r})$$

Kompatibel mit unserer Definition des
<u>Skalarprodukts</u>:

$$(x, y) = x_\alpha y^\alpha$$
$$= g_{\alpha\beta} x^\beta y^\alpha = \ldots = x^0 y^0 - \underline{x} \cdot \underline{y}$$

<u>Differentialoperatoren</u>

- <u>Gradient</u>

a) Ableitung nach kontravarianten Komponenten

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$$

b) Ableitung nach kovarianten Komponenten

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$$

$$= g_{\mu\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\lambda}$$

$$= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

- Divergenz

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^0 + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

(Skalarprodukt)

$$= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} A^0 + \nabla \cdot \underline{A}$$

d'Alembert-Operator

wir hatten:

$$\Box = \underset{\text{Laplace}}{\Delta} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow -\Box = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} - \Delta$$

$$= \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \nabla \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\nabla \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

VII.7. Mechanische Größen (Auswahl)

Forderung:

- Grundgesetze der klass. Mechanik sollen so umgeschrieben werden, dass sie forminvariant gegenüber Lorentz-Transformationen werden

  ($\Rightarrow$ alle Größen müssen als Vierertensoren geschrieben werden!)

- Für $v \ll c$ Reproduktion der bekannten Relation

a) („Welt"-) Geschwindigkeit

differentielles Längenquadrat

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\underline{r}^2$$

$$= dx^\mu dx_\mu$$

Skalarprodukt (Lorentz invariant!)

definiere daraus

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} ds^2 = (dt)^2 - \frac{1}{c^2}(d\underline{r})^2 \quad (*)$$

ebenfalls Lorentzinvariant
(c ist ist in allen Inertialsystemen gleich!)

Interpretation?

betrachte mitbewegtes Bezugssystem
in dem ein Teilchen im Ursprung ruht

$$d(x')^\mu = (c\,dt', 0, 0, 0)$$

hierfür folgt.

Skalarprodukt Lorentzinvariant

$$d\tau^2 = \frac{1}{c^2} dx^\mu dx_\mu = \frac{1}{c^2} dx'^\mu dx'_\mu$$

$$= \frac{1}{c^2} c^2 dt'^2 = (dt')^2$$

$d\tau$ entspricht dem Zeitintervall in einer mitbewegten Uhr

$\hat{=}$ "Eigenzeit"

Definition der Weltgeschwindigkeit

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

Kontravarianter Vierervektor