

Definieren
Welt-Geschwindigkeit

differenzielles Linienelement

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu \quad \text{Lorentz-invariant!}$$
$$= c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

definiere

$$\textcircled{*} (d\tilde{z})^2 = \frac{1}{c^2} ds^2 \quad \text{Lorentz-invariant!}$$
$$= (dt)^2 - \frac{1}{c^2} (dx)^2$$

Interpretation:
im mitbewegten Bezugssystem $dx^\mu = (cdt, 0, 0, 0)$
mit Teilchen im Ursprung aus $\textcircled{*}$ folgt: $(d\tilde{z})^2 = (dt)^2$
"Eigenzeit" im mitbewegten Bezugssystem

Weltgerade:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tilde{z}} \quad \text{Kontravarianten Vektoren}$$

umschreiben:

(Kettenregel) $\Rightarrow u^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tilde{z}}$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Was ist $\frac{dt}{d\tilde{t}}$??

wir hatten

$$\begin{aligned}c^2(d\tilde{t})^2 &= c^2(dt^2 - (dx)^2) \\&= c^2(dt)^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) \\&= c^2(dt)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad | : c^2\end{aligned}$$

$$(d\tilde{t})^2 = (dt)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow dt &= \gamma d\tilde{t} \\&= \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} d\tilde{t}\end{aligned}$$

setze das ein in u^μ

$$\begin{aligned}u^\mu &= \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tilde{t}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} \\&= \gamma \begin{pmatrix} c \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{mit } \underline{v} = \frac{d\underline{x}}{dt}\end{aligned}$$

Beachte:

u^μ

Die Raumkomponenten der Vierergeschwindigkeit entsprechen nicht der normalen Geschw. \underline{v} ,
 Sondern sie unterscheiden sich um Faktor γ
 (erst für $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, d.h. $\gamma \rightarrow 1$
 konsistent mit bekannte Ausdruck)

Norm

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - (\underline{v})^2) = \frac{c^2 - v^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c^2 - v^2}{(c^2 - v^2)^{1/2}} = c^2$$

b) Viererimpuls, Energie

definiere

$$p^\mu = m u^\mu \quad \text{Viererimpuls}$$

$$= m \gamma (c, \underline{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m (c, \underline{v})$$

Raumkomponenten

$$(p^1, p^2, p^3) = \underbrace{m(\gamma)}_{m(\gamma)} (\underbrace{v_x, v_y, v_z}_{\underline{v}})$$

$$= \underline{p}^{\text{rel}}$$

'relativistische Impuls'

Um die Analogie zum gewöhnl. Impuls zu betonen, führt man die relativistische Masse $m(\gamma) = \gamma m = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Die "nackte" Masse nennt man Ruhemasse

Norm des Viererimpulses.

$$p^\mu p_\mu = m^2 u^\mu u_\mu \\ = m^2 c^2$$

Bezug zur Energie

Definition der relativistischen kinetischen Energie

$$T^{rel} = m\gamma c^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad c^2 \quad (*)$$

Verknüpfung mit dem Viererimpuls

$$p^\mu p_\mu = m^2 \gamma^2 c^2 - m^2 \gamma^2 v^2$$

$$= \frac{(T^{\text{rel}})^2}{c^2} - \frac{m^2 \gamma^2 v^2}{(p^{\text{rel}})^2}$$

$$p^\mu = m \gamma \begin{pmatrix} c \\ \underline{v} \end{pmatrix}$$

$$= m^2 c^2$$

↑ valeuiges Ergebnis

auflösen

$$(T^{\text{rel}})^2 = m^2 c^4 + m^2 \gamma^2 v^2 c^2$$

$$= m^2 c^4 + (p^{\text{rel}})^2 c^2$$

Alternative
Def. zu (*)

Die relativ. kinetische Energie ist
also eng mit dem Viererimpuls
verknüpft

Bemerkung zum nicht-relativ. Grenzfall von T^{rel}

Ausgangspunkt (*) $T^{\text{rel}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2$

betrachte Fall $\frac{v}{c} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{v^2}{c^2} \Rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

$$T^{\text{rel}} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} \dots$$

Für kleine v :

$$T^{\text{rel}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

mc^2 nicht-relativistisch kinetische Energie
Zusatzterm

Die Formel für T^{rel} geht im Grenzfalle $\frac{v}{c} \ll 1$
 nicht automatisch in die alte Formel über!

Bemerkung zum Impulserhalten

Aus dem Äquivalenzpostulat

(s. Kap VII. 2)

muß gefolgt werden:

$f^{rel} \stackrel{!}{=} \text{const}$ bei kräftefreier Bewegung
in allen Inertialsystemen.

Andererseits gilt (da p^μ Kovarianten \leftarrow Vektoren)

$$p^\mu = L_{\mu\nu} p^\nu$$

Bei einer Lorentz Transformation
werden Raum- und Zeitkomponenten
von p^μ gemischt

\Rightarrow drei neuen Raumkomponenten von p^μ
hängen auch von T^{rel} ab!

Damit folgt aus $f^{rel} \stackrel{!}{=} \text{const}$

auch $T^{rel} \stackrel{!}{=} \text{const}$

Erhaltung des
relativist. Impulses

\Rightarrow Erhaltung von T^{rel} !!



Daraus ergibt sich eine weitere Folgerung

Wir hatten für $\frac{v}{c}$ klein

$$T^{\text{rel}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

$$= \text{const!}$$

also:

Eine Änderung der "normalen" kinetischen Energie
 $T^{\text{nicht-relativist}} = \frac{1}{2}mv^2$ wird durch die Änderung
der "Ruheenergie" mc^2 kompensiert

\Rightarrow Einsteins Äquivalenz von Masse und Energie!

~~Fazit~~ Schlussbemerkung

Die relativist. Formulierung des Kraftgesetzes

$$m \frac{d}{d\tau} u^\mu = K^\mu$$

Minkowski
Weltgeradenlogik

Viere-Kraft
Minkowski-Kraft

mit $K^\mu = \gamma \left(\frac{\underline{F} \cdot \underline{v}}{c}, F_x, F_y, F_z \right)$

es gilt: Arbeit $\underline{F} \cdot \underline{v} = \frac{d}{dt} (T_{\text{rel}}) \rightarrow \text{Volta}$

VII. 8. Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Im letzten Abschnitt:

Die in der nicht-relativist. Mechanik verwendeten Größen müssen verändert werden, wenn man die Grundgesetze Lorentzinvariant formulieren will!

(Beispiel: $\underline{p}^{\text{rel}} = m \gamma \underline{v}$
 $\neq_{\text{i.A.}} m \underline{v}$)

Wie ist das in der E-Dynamik?

a) Kontinuitätsgleichung (Ladungserhaltung)

$$\frac{\partial \rho(\underline{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}, t) = 0$$

Ladungsdichte

Stromdichte

$$\underline{j}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t) \cdot \underline{v}$$

Experimentelle Erfahrung!

Die Gesamtladung q eines Teilchens ~~ist~~ hängt nicht von der Teilchengeschw. ab
 $\rightarrow q$ ist invariant!

Dies gilt aber nicht für die
Ladungs- und Stromdichte!

Grund: Längenkontraktion!

- sei Σ ein mit der Ladung bewegtes Inertialsystem
(in Σ_0 ruht die Ladung), und sei

$$\rho_0 = \frac{dq_0}{dV_0} \text{ die mitbewegte Ladungsdichte} \\ \text{(Ruhladungsdichte)}$$

- sei Σ ein anderes Inertialsystem, das sich mit Geschw. \underline{v} parallel zur z-Achse bewegt

Ladungsdichte in Σ :

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$

benutze $dq = dq_0$

$$\Rightarrow \rho = \frac{dq_0}{dV}$$

also muß gelten $\rho_0 dV_0 \stackrel{!}{=} \rho dV$ $\textcircled{*}$

Schreibe:

$$dV = dx dy dz = dx_0 dy_0 \underbrace{dz_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{\text{Längenkontraktion}} = \frac{1}{\gamma} dV_0$$

Einsetzen in $\textcircled{*}$

$$\Rightarrow \rho = \frac{d\rho_0}{dV} \rho_0 = \gamma \rho_0$$

analog

$$\underline{j} = \rho \underline{v} = \gamma \rho_0 \underline{v}$$

Definiere nun die Vierer-Stromdichte

$$j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z) = (c\rho, \underline{j}) \\ = (c\gamma\rho_0, \gamma\rho_0 \underline{v})$$

Bezug zur Vierer-Geschwindigkeit:

$$u^\mu = \gamma(c, \underline{v})$$

$$\Rightarrow j^\mu = \rho_0 u^\mu$$

— Ruheadensdichte!

Zeige, dass j^μ tatsäclich kontravariante Vektorkomponente ist

Im Ruhesystem Σ^0 ruht der Teilchen, setze es in den Ursprung: $j_{\Sigma^0}^\mu = (c\rho_0, 0, 0, 0)$ da $\underline{v} = 0$ in Σ^0

Lorentztransformation Σ^0 hat relative zu Σ die Gesch. $-\underline{v}$

$$L_{\mu\lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

$$j_{\Sigma}^\mu = L_{\mu\lambda} j_{\Sigma^0}^\lambda$$

$$j_{\Sigma}^0 = \gamma j_{\Sigma^0}^0 - \beta \gamma \underbrace{j_{\Sigma^0}^3}_0 = c\gamma\rho_0$$

$$j_{\Sigma}^1 = 0$$

$$j_{\Sigma}^2 = 0$$

$$j_{\Sigma}^3 = \dots = -\gamma v_2 \rho_0 = -v_2 j$$

Kompatibel mit unserer Vorzeichen Def. von j^μ !

Zurück zur Kontinuitätsgleichung

Wir haben: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{j} = 0$

betrachte. Nerven-Divergenz

Zeitliche Komponente
von j^μ
 $j^0 = c\rho$

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} j^0 + \nabla \cdot \mathbf{j}$$

benutze $j^\mu = (c\rho, j_x, j_y, j_z)$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu \partial j^\mu = 0} \quad \text{Kontinuitätsgleichung!}$$