3. Maxwellgleichungen – eine Ableitung über Eichfelder

Maxwellgleichungen als zentrale Bewegungsgleichungen des elektromagnetischen Felds

Ableitung über Lagrangegleichungen f. Felder

3.1. Lagrangegleichungen f. Felder

3.1.1. Erinnerung an Teilchen

Teilchen: Lagrangefunktion $L(q_i, \dot{q}_i)$

Lagrangegleichungen: $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

→ Teilchenbahn damit bestimmt $\ddot{q}_i = f(q_i)$

Impulsdefinition: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ → $[q_i, p_i] \neq 0$ in der QM

3.12. Wirkprinzip f. Felder

Analogie $\underbrace{S = \int dt\, L(q_i; \dot{q}_i)}_{\text{Teilchen}}$ (S Wirkg.)

f. Felder betrachten: Ψ_i : Felder, Feldkomponenten $i = x, y, z$

$$S = \int dt\, L(\Psi_i, \partial_t \Psi_i, \partial_{x_j} \Psi_i)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_i(\vec{r}, t) \\ q_i(t) \end{array}\right\}$$

Verallg. d. Lagrangefkt. f. Felder, $\boxed{t \to \vec{r}, t}$ $\qquad \partial_{x_j} \to \partial_j$

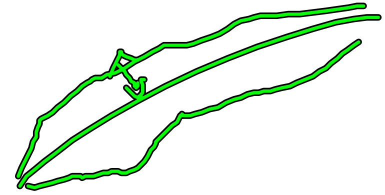
$$S = \int dt \int d^3r\, \mathcal{L}(\Psi_i, \partial_t \Psi_i, \partial_j \Psi_i)$$

Einführg. des Orts analog z. Zeit in die Theorie weil $\Psi(t, \vec{r})$: $\mathcal{L} \hat{=}$ Lagrangedichte

in Analogie zur Mechanik $\boxed{\delta S = 0}$

Wirkg auch für Felder extremal!

3.1.3. Lagrange Feldgleichungen



$$S = \int dt \int d^3r \, \mathcal{L}\left(\psi_i^0 + \delta\psi_i , \; \partial_t \psi_i^0 + \partial_t \delta\psi_i , \; \partial_j \psi_i^0 + \partial_j \delta\psi_i\right)$$

$\psi_i^0 \mathrel{\hat{=}}$ reale Feld , $\delta\psi_i \mathrel{\hat{=}}$ Variation , jetzt Taylorreihe

$$S = S_0 + \int dt \int d^3r \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i^0} \delta\psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi_i^0)} \partial_t \delta\psi_i + \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \psi_i^0)} \partial_j \delta\psi_i \right)$$

$j = x, y, z$

$$S_0 = \int dt \int d^3r \, \mathcal{L}\left(\psi_i^0 , \partial_t \psi_i^0 , \partial_j \psi_i^0\right)$$

$$S - S_0 = \delta S \doteq 0 = \int (\ldots \delta\psi_i)$$

bei der partiellen Integration entsteht ein „Minus"

Randterme verschwinden

durch lineare Unabhängigkeit der ψ_i , $\psi_i^0 \to \psi_i$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underbrace{\psi_{i|t}}_{\partial_t \psi_i}} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underbrace{\psi_{i|j}}_{\partial_j \psi_i}}}$$

Lagrange Feldgleichungen

3.1.4. Rätselraten um die Lagrangedichte

$\mathcal{L}$ anders, L war $T-U$ in Mechanik

„you have to fiddle around" $\hat{=}$ raten + basteln

Feynman

Idee: man bastelt die $\mathcal{L}$ so, daß die richtigen Gleichungen herauskommen

Potential

Bsp: kennen Schrödingergleichung ψ, ψ^*

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\sum_i \left(\partial_i \psi^* \partial_i \psi\right) - U\psi^*\psi$$

$\psi(\vec{r},t)$, $\psi^*(\vec{r},t)$

Beweis, daß dies Schrödingergl. gibt: $\psi_1 = \psi^*, \psi_2 = \psi$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = \frac{i\hbar}{2}\partial_t \psi - U\psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}^*} = -\frac{i\hbar}{2}\psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*_{,j}} = \frac{\partial}{\partial \psi^*_{,j}}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_i \partial_i \psi^* \partial_i \psi\right)$$

δ_{ij}

$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_j \psi$$

$$\rightarrow \quad i\hbar \partial_t \psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U \right) \psi \quad \checkmark$$

3.2. Das elektromagnetische Feld als Eichfeld

<u>Eichung:</u> $\psi \rightarrow \psi e^{i\chi'}$

Transformation ändert nicht die Physik

$\chi' = \text{konstant}$

was passiert $\chi' = \chi'(\vec{r}, t)$?

Ladung ↓

wähle: $\chi' = \frac{q}{\hbar} \chi$

$$i\hbar \partial_t \left(\psi e^{i \frac{q}{\hbar} \chi} \right) = \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \right)^2 + U \right) \psi e^{\frac{iq}{\hbar} \chi}$$

$\chi(\vec{r}, t)$!

<u>durchführen:</u>

$$i\hbar\,\partial_t \psi(\vec r,t) = \left\{ \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec\nabla + \underline{\underline{\frac{q}{\hbar}\vec\nabla\chi}}\right)^2 + U + \underline{\underline{\frac{q}{\hbar}\partial_t\chi}} \right\}\psi(\vec r,t)$$

$$U, \chi = f(\vec r,t)$$

$\longrightarrow$ Physik ändert sich!

um das zu retten führen wir 2 neue Felder in der Theorie ein:

$\vec A$: Vektorpotential

ϕ : skalares Potential

<u>fordern</u>:

$$\psi \to \psi e^{i\frac{q}{\hbar}\chi}$$

$$A \to A + \vec\nabla\chi$$

$$\phi \to \phi - \partial_t\chi$$

<u>Eichtransformation</u> $\forall$ Felder

Die Schrödinger Gl. bleibt invariant, wenn man $\vec A, \phi$ als <u>neue</u> physikal. Realität in Schrö. Gl. berücksichtigt.

Schrödingergl. und $\vec{A}, \phi$ =

Schrödingergl. geladen Teilch in elektromagn. Feld

$$i\hbar \partial_t \psi = \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \underline{\underline{q}} \vec{A} \right)^2 + U + \underline{\underline{q}} \phi \right) \psi$$

wenn Trafo ausgeführt wird und
alle Felder transformiert werden
bleibt die Schrödingergl. invariant.

3.3. Freies Maxwellfeld

Ziel: Herleitung der Feldgleichungen (Maxwellgleichungen) für $\vec{A}$ und ϕ.

$\mathcal{L}$ f. Schrödingergl. ist f. WW zwischen $\vec{A}, \phi, \psi$.

freies Feld $\vec{A}, \phi$ hat zusätzlich $\underline{\underline{\mathcal{L}_F}}$ ohne ψ

Bedingungen:

- zu konstruierende Felder sollen unabhängig v. χ sein

Feld $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ wählen aus $\underline{\underline{\phi, \vec{A}}}$

$$E_x \sim \partial_x \phi + \partial_t A_x$$

oder $$B_x \sim \partial_y A_z - \partial_z A_y$$

ist sinnvoller Ausdr. v. Größe die in der Theorie auftauchen sollten

– quadratische Form in den Variablen

$$\mathcal{L}_F \left(\vec{E}, \vec{B} + \text{quadratisch} \right)$$

$$\boxed{\longrightarrow \quad \mathcal{L}_F = \frac{\varepsilon_0}{2} \sum_i \left(\partial_i \phi + \partial_t A_i \right)^2 - \frac{1}{2\mu_0} \sum_k \left(\sum_{ij} \varepsilon_{kij} \, \partial_i A_j \right)^2}$$

Lagrangedichte d. freien Maxwellfelds

3.4. Ableitung der gekoppelten Feld-Materie-gleichungen

Zusammenfassg. aller $\mathcal{L}$'s:

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right)$$ freies Schrödingerfeld „$\partial_t \psi$“

$$- q\,\phi\, \psi^* \psi$$ ← potentielle Energie v. ψ in ϕ

$$+ \frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + q\vec{A}\right)\psi^* \cdot \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\psi$$

↑ weil *

$$\left.\begin{array}{l} + \frac{1}{2}\sum_i \Big(\varepsilon_0 \left(A_{i,t}^2 + \phi_{,i}^2 + 2\,\phi_{,i} A_{i,t}\right) \\ \qquad - \mu_0^{-1} \left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_i^2 \Big) \end{array}\right\} \mathcal{L}_F$$

$$\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} \to \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)$$

mit Hilfe der Lagrange Feldgleichgn. erhält jetzt die gekoppelten Feld-Materiegleichungen.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Y}} + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y_{,j}}$$

3 Felder: Ψ^* $\rightarrow$ Schrödingergl.

A_x, A_y, A_z $\rightarrow$ Wellengleich. f. Vektorpotential

ϕ $\rightarrow$ – " – f. skalar Potential / Poissongl.

a) Auswertg. f. skalar Potential ϕ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,t}} + \sum_j \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,j}}$$

$$-q\,|\Psi|^2 = \underbrace{0} + \varepsilon_0 \sum_j \partial_j \underbrace{\left(\partial_j \phi + A_{j,t}\right)}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}}$$

$$\underbrace{q\,|\Psi|^2}_{\text{Ladungsdichte } \rho} = \varepsilon_0 \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}_{\text{Quelldichte}}$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Quellgleichung d. elektrischen Felds

oder in Potential:

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \vec{\nabla}\cdot\partial_t\vec{A}}$$

b) Auswertg. f. Vektorpotential

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_x} = \dots$$

Wirbelgleichung d. magnet. Felds

$$\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}}$$

und $\vec{j} = \frac{q}{2m}\psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)\psi + \text{k.c.}$

oder in Potential:

$$\boxed{-\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\partial_t\phi}$$

Es existieren auch $\underline{\underline{2}}$ weitere Maxwellgl.:

(i) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad | \vec{\nabla} \cdot$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

Quellengleichung d. magn. Felds

(ii) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad | \partial_t$

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times \partial_t \vec{A} = \vec{\nabla} \times (-\vec{E} - \vec{\nabla}\phi) = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$$

$$\boxed{\partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}}$$

Wirbelgl. d. elektrischen Felds.