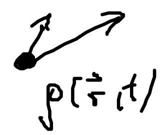
3.5. Die Maxwellgleichungen: Zusammenfassung

$\vec E(\vec r,t)$, $\vec B(\vec r,t)$ werden durch Maxwellgl. und die zugehörige Quelle bestimmt:

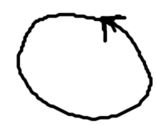
$$\boxed{\vec\nabla\cdot\vec E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Die Quelldichte v. $\vec E$ ist durch die Ladungsdichte $\rho(\vec r,t)$ bestimmt.



$$\boxed{\vec\nabla\cdot\vec B = 0}$$

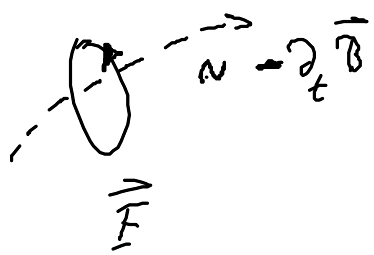
Die Quelldichte v. $\vec E$ ist Null



„geschlossene Feldlinien"

$$\boxed{\vec\nabla\times\vec E = -\partial_t\vec B}$$

Die Wirbeldichte von $\vec E$ wird durch zeitliche Veränderung v. $\vec B$ bestimmt.

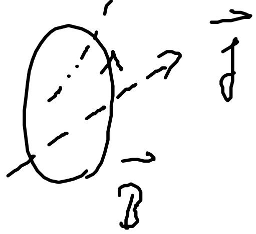


Minuszeichen ≙ Lenzsche Regel

$$\boxed{\begin{gathered}\vec\nabla\times\vec B = \mu_0\vec j + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}\\ c^2 \equiv \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\end{gathered}}$$

$\uparrow \partial_t\vec E$

Die Wirbeldichte d. Magnetfelds ist durch Stromdichte $\vec j$ und zeitliche Änderg. d. $\vec E$-Felds gegeben.



1820 ~ Oerstedt : $\vec\nabla \times \vec B = \vec j \mu_0$

1830 ~ Faraday : Induktionsgesetz $\vec\nabla \times \vec E = -\frac{\partial}{\partial t} \vec B$

1876 ~ Maxwell : Ergänzg. $\frac{1}{c^2} \partial_t \vec E$

$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$

„sichtbar"

$\Rightarrow$ Licht ist Teil einer elektromagn. Welle

„Quellen" d. Felder : <u>Ladungsdichte</u> $\rho = q |\psi|^2$

$\psi(\vec r, t)$ Schrödingerwellenfkt.

<u>klass. Ladungsdichte</u>: $\rho(\vec r, t) = \sum_{i=1}^{N} q_i \underbrace{\delta(\vec r - \vec r_i(t))}$

am Ort $\vec r_i$ befindet sich die Ladg. q_i

Ladg q_i

$\vec r_i = \vec r_i(t) \mathrel{\hat=}$ Bahnkurve

<u>Stromdichte</u>: $\vec j = \frac{q}{2m} \psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \vec\nabla - q \vec A \right) \psi + h.a.$

klassisch Stromdichte: $\vec{j} = \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i(t)\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$

ρ

mit Bewegungsgl. f. $\vec{j}$, also $\psi(\vec{r}, t)$ oder $\vec{r}_i(t)$

ist das ein selbst-konsistentes System

$$i\hbar \partial_t \psi = \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - q\vec{A} \right)^2 + q\phi \right) \psi$$

oder klass.: $$\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\vec{r}}_i(t) \right) = q_i \left(\vec{E}(\vec{r}_i, t) + \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B}(\vec{r}_i, t) \right)$$

Lorentzkraft aus Newton-Bewegungsgleichung

- alternativ kann man auch die Potentialgleichungen f. $\phi, \vec{A}$ lösen statt der Maxwellgl. f. $\vec{E}, \vec{B}$.

__Aber:__ $$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$$

am Ende berechnen um eichinvariante Größen zu finden.

3.6. Klassifizierung

3 Mgl. der Behandlung:

Materie + Felder $(\vec{E}, \vec{B})$ klassisch $\Rightarrow$ klassische ED

Materie quantisieren (Ψ) + Feld $(\vec{E}, \vec{B})$ klassisch $\Rightarrow$ „halbklassisch, semiklassisch"

— " — + Felder $(\vec{E}, \vec{B})$ quantisieren $\Rightarrow$ vollquantisierte Theorie

3.7. Bilanzen

3.7.1. Ladungsbilanz (Kontinuitätsgleichung)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0$$

Quelle und Senke d. Stromdichte am Ort $\vec{r}$ wird durch Änderung (t) der Ladungsdichte erzeugt.

klassisch Beweis:

$$\partial_t \rho(\vec{r}, t) = \partial_t \sum_i q_i \, \delta(\vec{r} - \vec{r}_i(t))$$

$$= \partial_t \sum_i q_i \, \delta(x - x_i(t)) \, \delta(y - y_i(t)) \, \delta(z - z_i(t))$$

$$= \sum_i q_i \Big(\underline{\underline{\partial_x}} \delta(x - x_i(t)) \cdot (-\dot{x}_i(t)) \cdot \delta(y - y_i(t)) \, \delta(z - z_i(t))$$

$$+ \delta(x - x_i(t)) \, \underline{\underline{\partial_y}} \delta(y - y_i(t)) (-\dot{y}_i(t)) \, \delta(z - z_i(t))$$

$$+ \delta(x - x_i(t)) \, \delta(y - y_i(t)) \, \underline{\underline{\partial_z}} \delta(z - z_i(t)) \, (-\dot{z}_i(t)) \Big)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} \qquad = \;\hat{=}\; \text{Nabla}$$

$$= \sum_i q_i \left(-\vec{\nabla}_r \cdot \dot{\vec{r}}_i(t)\; \delta\left(\vec{r} - \vec{r}_i(t)\right) \right)$$

$$= -\vec{\nabla}_r \cdot \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i\; \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

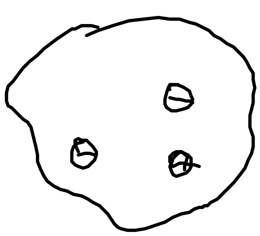
$$= -\vec{\nabla}_r \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) \qquad \checkmark$$

Interpretation: Abfließende Ladungen $\dot{\rho}(\vec{r}, t) \neq 0$ erzeugen Strömen mit Feldlinien am Ort $\vec{r}$

Integrieren über V mit Oberfläche (V)

Satz v. Gauß:

$$\int_V dV\, \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = - \int_V dV\, \partial_t \rho(\vec{r}, t)$$



V mit (V)

$$\oint\!\!\oint_{(V)} d\vec{A} \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = -\partial_t \int_V dV\, \rho(\vec{r}, t)$$

$I(t)$ $\qquad$ $Q(t)$

Strom durch die Oberfläche (V) $\qquad$ Gesamtladung im Volumen V

$$\frac{d}{dt} Q(t) = -I(t)$$

Änderung d. Gesamtladung im Volumen V ist gegeben d. Strom durch (V).

3.7.2. Energiebilanz (Poyntingtheorem)

$$-\vec{B}\cdot \Big| \quad \underline{\vec{\nabla} \times \vec{E}} = -\partial_t \vec{B} \quad \Big| \quad \vec{E}\cdot \Big| \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \underline{\underline{\vec{j}}} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

Lagrangedichte: Energiedichte $\sim E^2, B^2$

multiplizieren, addieren

$$-\vec{B}\cdot(\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{E}\cdot(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{1}{2} \partial_t \left(\vec{B}^2 + \frac{1}{c^2} \vec{E}^2\right) + \mu_0 \vec{E}\cdot\vec{j}$$

NR:

$$\partial_t (\vec{B}\cdot\vec{B}) = \dot{\vec{B}}\cdot\vec{B} + \vec{B}\cdot\dot{\vec{B}} = 2\vec{B}\cdot\dot{\vec{B}}$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{1}{2}\partial_t \vec{B}^2 = \vec{B}\cdot\dot{\vec{B}} \qquad 1/c^2 = \varepsilon_0\mu_0$$

---

durch μ_0 teilen

$$-\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{B}\right) = \frac{1}{2}\partial_t\left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2 + \varepsilon_0\vec{E}^2\right) + \vec{j}\cdot\vec{E}$$

<u>Poynting theorem:</u>

$$\frac{\partial}{\partial t} w_{em}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\cdot\vec{S}(\vec{r},t) = -\vec{j}\cdot\vec{E}$$

w_{em} = elektromagnet. E Dichte $= \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2$

$\vec{S}$ = Poynting vektor $= \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$

$\vec{j}\cdot\vec{E}$ = Verlustleistungsdichte

<u>Interpretation:</u>

– Analogie Kontinuitätsgleichg. $\underline{\underline{\partial_t \rho}} + \vec{\nabla}\cdot\underline{\underline{\vec{j}}} = 0$

$\rightsquigarrow$ $\vec{S}$ ist die Energiestromdichte,

w_{em} ist die Energiedichte

- $\vec{j}\cdot\vec{E}$ kein Analogon in $\dot{\rho} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$

aber Interpretation analog zu $\vec{v}\cdot\vec{f}$ Leistung in Mechanik

Kraft

$\vec{j}\cdot\vec{E} \;\hat{=}\;$ Leistungsdichte

„~~Verlust~~leistungsdichte"

↳ beschleunigte LT entzieht dem Feld Energie

Umsgenommen hier in $\vec{E}, \vec{D}$ ist weil $\vec{B}$-Feld keine Arbeit verrichtet!

- Plausibilität!

Arbeit: $A = \int dV \int dt \; \vec{j}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)$

Dichte ↗ übergang v. Leistg. → Arbeit

$\vec{j}$ einsetzen $= \underline{\int dV} \int dt \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i(t)\,\delta(\underline{\vec{r}} - \vec{r}_i(t))\cdot\vec{E}(\underline{\vec{r}},t)$

$= \int dt \sum_i q_i \dot{\vec{r}}_i(t)\cdot\vec{E}(\vec{r}_i,t)$

$= \sum_i q_i \int \cancel{dt} \frac{d\vec{r}_i(t)}{\cancel{dt}}\cdot\vec{E}(\vec{r}_i,t)$

$$= \sum_i \int d\vec{r}_i \cdot \underbrace{\vec{E}(\vec{r}_i, t)\, q_i}_{\text{Anteil d. } \vec{f}_{Lorentz}(\vec{r}_i, t) \text{ f. } \vec{E}}$$

Arbeitsdefinition d. Mechanik

3.8. Es werde Licht: Wellengleichungen

Wirbelgleichungen:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} + \mu_0 \vec{j} \quad \Big| \partial_t$$

$$-\partial_t B = \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad \Big| \vec{\nabla} \times$$

addiere

$$+ \quad 0 = \underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})}_{(\vec{\nabla}\, \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \Delta \vec{E})} + \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} + \mu_0 \partial_t \vec{j}$$

$$\underbrace{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}} = \mu_0 \partial_t \vec{j} + \vec{\nabla}(\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{\rho})$$

Wellenoperator $\qquad \varepsilon_0$

$$\underbrace{\Box \vec{E}}_{\text{Lsg. erlaubt Wellen}} = \underbrace{\mu_0 \partial_t \vec{j} + \vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)}_{\text{Quelle der Wellen}}$$

Lsg. erlaubt

Wellen

Quelle der Wellen

3.9. Weiteres Vorgehen

a) Felder im Vakuum $\vec{j} = 0 = \rho$

$\Box \vec{E} = 0$, analog $\Box \vec{B} = 0$ „homogene Wellengl."

b) Felder mit j, ρ „inhomogene Wellengleich."

c) zeitunabhängige Lösungen $\to$ Elektrostatik, Magnetostatik

d) Maxwellgl. in Medien (Optik),

e) Erzeug. v. Wellen

f) Quantentheorie d. Maxwellgl. + Materials (Laser)