4. Wellen im Vakuum

4.1. Wellengleichung im Vakuum

Maxwell: $\rho = 0 = \vec{j}$

$$(1)\quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}\,, \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{E} \quad (2)$$

$$\underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0\,, \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0}$$

$$(1)\quad \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{\nabla} \times \vec{B} \overset{(2)}{=} -\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \;\equiv\; \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot \; - \Delta$$ (allg. Vektoridentität f. Nabla)

$$\hookrightarrow \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) \vec{E} = 0$$

gilt für jede Komponente $E_{i=x,y,z}$

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) E_i(\vec{r},t) = 0}$$

Wellengleichung im Vakuum f. $\vec{E}$-Feld

$\vec{B}$-Feld erfüllt eine analoge Gleichung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

→ partielle, <u>zugleich</u> aber lineare, homogene Dgl.

- im Vergleich gewöhnliche Dgl: n-ter Ordnung

  → n parametrige Lösungsschar

  (Fundamentalsystem: n-Funktionen, n-Konstanten)

- Lösung einer partiellen Dgl:

  n - Ordnung der Dgl. (höchste Ableitg.), Wellgl. $n = 2$

  p - Anzahl der unabhängigen Variablen, -"- $p = 4$
  x, y, z, t

<u>Aussage</u>: Lsg besteht aus n unbestimmten Funktionen mit $p-1$ Variablen

Bsp: 1-dimensionale Wellengleichung

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t}\right)}_{n=2} E_y \underbrace{(x, t)}_{p=2} = 0$$

→ es gibt 2 unbestimmte Funktionen

mit je $p-1 = 1$ Variablen

die Funktionen sind: $f(x-ct)$

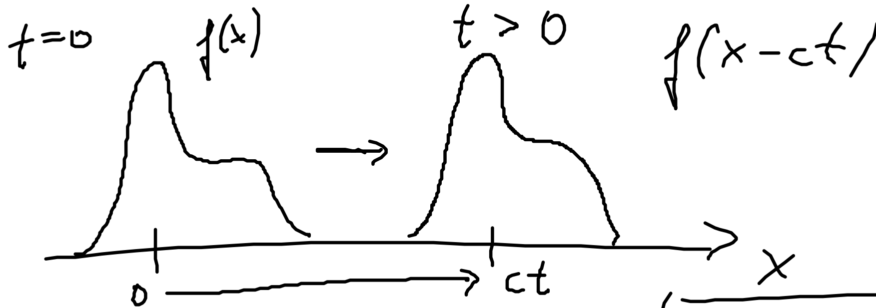
$$g(x+ct)$$

<u>Beweis d. Einsetzen:</u>

$\partial_x^2 E \to f''$, $\partial_t^2 E \to f''(-c)^2$

erfüllt die Wellengleichung !

f, g Funktion d. Anfangs und Randbedingung festlegen ⇒ bestimmt die Lösung



forminvariante Ausbreitung ; $\boxed{\text{sich in Raum/Zeit fortpflanzendes Signal nennt man Welle}}$

$g(x)$ breitet sich nach links aus

4.2. Ebene Welle als Fundamentallösung

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(\vec{k})t)} \right\}_{\forall \vec{k}}$$

ist ein vollständiges System,

$\omega = \omega(\vec{k})$ heißt Dispersionsrelation

ω und $\vec{k}$ sind nicht unabhängig

Einsetzen der Welle: $\quad \underbrace{\Delta E_i} - \underbrace{\frac{1}{c^2}\partial_t^2 E_i} = 0$

$E_k e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$

$$\left(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2\right) E_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t}$$

$$- \frac{1}{c^2}(-i\omega)^2 E_k e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega t} = 0$$

$$\underbrace{\left(-\vec{k}^2 + \frac{1}{c^2}\omega^2\right)}_{=0} E_k e^{i\cdots} = 0$$

Dispersionsrelation $\boxed{\omega = c|k|}$ v. em. Welle im <u>Vakuum</u>

Jeder Feld ist darstellbar:

$$E_i(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} E_{i\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, e^{-i\omega(k)t}$$ analog zu Schrödinger gl.

<u>Eigenschaft d. eben Welle:</u> $$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \vec{E}_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r} - i\omega(k)t}$$

a) Orthogonalität der Vektorkoeffizienten: $\vec{E}_k$, $\vec{B}_k$, $\vec{k}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$, Ansatz einsetzen od. FT

$$i\vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}} = i\omega \vec{B}_{\vec{k}}$$

$$\boxed{\vec{k} \times \vec{E}_{\vec{k}} = \omega \vec{B}_{\vec{k}}}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

$$i\vec{k} \times \vec{B}_k = -i\omega/c^2\, \vec{E}_k$$

$$\boxed{\vec{k} \times \vec{B}_k = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}_k}$$

$\Rightarrow$ $\vec{k}$, $\vec{E}_k$ und $\vec{B}_k$ bilden ein orthogonalen Satz v. Vektoren

b) Bedeutg. v. Phasefronten

$$E_i = \mathrm{Re}\Big(\underbrace{E_{i\vec k}\, e^{i(\vec k\cdot\vec r - \omega t)}}_{\text{ebene Welle}}\Big) = E_{i\vec k}\cos(\underbrace{\vec k\cdot\vec r - \omega t}_{\text{Phase der ebenen Welle}})$$

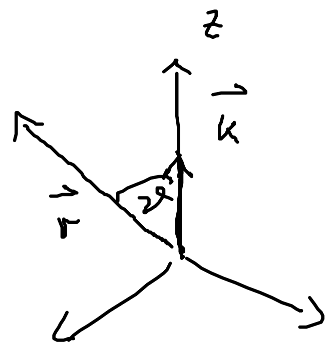
Realteil wegen Messgröße

Wann ist die Phase konstant?

$$\vec k\cdot\vec r - \underbrace{\omega t}_{\text{feste Zeit}} = \text{konst}$$

feste Zeit ≙ Blitzlichtaufnahme

$$\Downarrow \quad \underbrace{\vec k\cdot\vec r = \text{konst}}_{\text{Definiert eine Ebene}} \qquad \vec k = \text{konst}$$



$$\vec k\cdot\vec r = k r\cos\vartheta = k z = \text{konst}$$

$\rightarrow$ z konst $\rightarrow$ alle Punkte in x, y Ebene

Die Flächen konstanter Phase bei einer ebenen Welle sind Ebenen

c) Polarisationseigenschaft ebener Welle

- Richtg. d. $\vec{E}$ - Vektors $\hat{=}$ Polarisation

  kann i.a. an jedem Ort, zu jeder Zeit verschieden sein, steht aber immer $\perp \vec{k}$

- kann man das systematisieren?

- 1 fester $\vec{k}$, ein ebene Welle

$$\underline{\vec{E}(\vec{r},t)} = \underbrace{\vec{E}_{\vec{k}}}_{\perp \text{ zu } \vec{k}\text{, also in Ebene}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Komplexgröße, später Realteil

$$= \underbrace{\left(E_1 \vec{e}_1 + E_2 \vec{e}_2\right)}_{\text{wird in Ebene aufgespannt, Amplitude + Phase}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

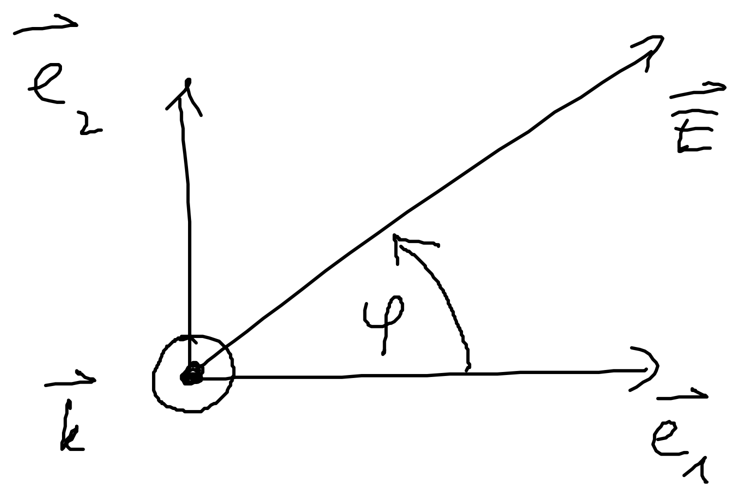
$$= \left(|E_1| e^{i\phi_1} \vec{e}_1 + |E_2| e^{i\phi_2} \vec{e}_2\right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}-i\omega t}$$

$$= \left(|E_1| \vec{e}_1 + |E_2| \vec{e}_2 \, e^{\underbrace{i(\phi_2 - \phi_1)}_{\Delta\phi}} \right) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t + \phi_1}$$

unwichtig, kann immer weggtransformiert werd. d. Zeitachsen-verschiebung

$$Re(\vec{E}) = |E_1| \vec{e}_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$$

$$+ |E_2| \vec{e}_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \Delta\phi)$$



$\varphi = \varphi(\vec{r}, t)$

bestimmt Lage d. $\vec{E}$ - Feld Vektors

$$\varphi(\vec{r}, t) = \arctan\left(\frac{|E_2| \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \Delta\phi)}{|E_1| \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right)$$

$|E_1|$, $|E_2|$, $\Delta\phi$ könn in Exp. eingestellt werden

1. Fall: $\Delta\phi = 0$ erhalten $\rightarrow$ $\cancel{\varphi(\vec{r},t)} = \arctan\left(\frac{|E_2|}{|E_1|}\right) =$ konst

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{E}\text{-Feld zeigt immer in dieselbe feste Richtung} \\ \vec{E}\text{ heißt linear polarisiert, fest im Raum}\end{array}}$$

2. Fall: $\underbrace{\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}}$, $|E_1| = |E_2|$

cos im Zähler wird z. Sinus

$\vec{k}$ legen wir in z-Achse

$$\varphi = \pm(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = \pm(k_z \cdot z - \omega t)$$

1. für festes z: $\vec{E}$-Spitze bewegt sich auf einer Kreisbahn

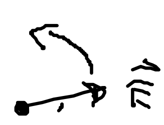
$$\varphi \sim \pm\omega t$$

2. f. festes t: (Blitzbild)

$$\varphi \sim \pm k_z z$$

$\vec{E}$-Spitze bewegt sich auf Spirale

$\rightarrow$ zirkular polarisiertes Licht



Vorzeichen:
- $+$ rechts zirkular polarisiert
- $-$ links zirkular polarisiert

neue angepaßte Vektoren zum Aufspannen d. Lichtvektor:

$$\vec{E} = |E_1| \left(\vec{e}_1 + e^{\pm i \frac{\pi}{2}} \vec{e}_2 \right) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}$$

$$= |E_1| \underbrace{\underbrace{\left(\vec{e}_1 \pm i \vec{e}_2 \right)}_{\vec{e}_{\pm}}}_{\text{zirkulare Einheitsvektoren}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{E} = \left(E_+ \vec{e}_+ + E_- \vec{e}_- \right)$$

neue Basis

3. Fall: $\Delta\phi$ beliebig, E_1, E_2 beliebig

führt auf elliptische Kurve d. Spitze d. E-Felds

elliptische Polarisation

Zusammenfassg. ebene Wellen:

Darstellg d. E-Felds:

Amplitude d. eben Welle $\vec{k}$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},\lambda=1,2} \left(\vec{e}_{\lambda(k)} E_{\vec{k}}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega(k)t)} + c.c. \right)$$

Zerlegung nach eben Welle

alle $\vec{k}$ sind i.a. nötig (Superposition)

Einheitsvekt. $\perp$ zu $\vec{k}$ die Ebene aufspannend (linear $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ zirkular $\sigma_+\ \sigma_-$)

reell

<u>wählen</u>: $\vec{e}_{\lambda'(k)} \cdot \vec{e}^{\,*}_{\lambda(k)} = \delta_{\lambda\lambda'}$

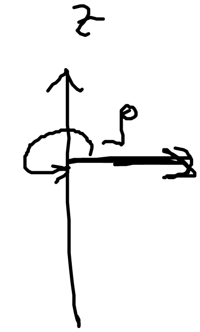
identisch k

$\vec{k} \cdot \vec{e}_{\lambda(k)}$ stellt $\vec{D}\cdot\vec{E} = 0$ sicher

<u>Info</u>: Exp. können <u>Stokes</u>parameter messen u. damit die Polarisation bestimmen

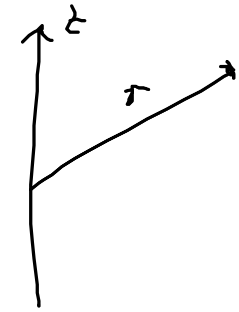
Es existieren weitere Wellen hoher Symmetrie, z.B. Kugel und Zylinderwellen:

Zylinderwelle: f. große Entfernung v. Ursprung



$$E_{Zylind} \sim \frac{e^{ik\rho - i\omega t}}{\sqrt{\rho}}$$

Kugelwelle:



$$E_{Kugel} \sim \frac{e^{ikr - i\omega t}}{r}$$

$$\boxed{\text{ÜA + Interaktion}}$$