d) E, B - Feld einer ebenen Welle

$$\vec{E} = \frac{1}{2} E_0\, e^{-i\omega t + i k_z z}\, \vec{e}_x + cc$$ als einfachste Lösung $\quad \omega = c k_z$

zugehöriges B-Feld ? aus: $\partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}$ (*)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \partial_z E_x \vec{e}_y$$

(*)

$$\Downarrow \quad \vec{B} = -\frac{1}{2} E_0\, e^{-i\omega t + i k_z z}\, \frac{1}{-i\omega} \cdot k_z \vec{e}_y + cc = \frac{E_0}{c} \cos(k_z z - \omega t)\, \vec{e}_y$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{B}|}{|\vec{E}|} = \frac{1}{c}$$ $\Downarrow$ Konsequenz f. Lorentzkraft

$$\vec{F}_L = q\,(\vec{E} + \underbrace{\vec{v} \times \vec{B}}_{\text{abschätzen mit } v\frac{|\vec{E}|}{c} \sim \frac{v}{c}})$$

ist f. nichtrelativistische Elektronen u.U. klein

$\rightarrow$ erster Term, f. Teilchen die ebenen Welle ausgesetzt sind, dominant.

4.3. Anfangswertprobleme mit ebenen Wellen

Anfangswertproblem: $\vec{E}(\vec{r},t)$ ist gesucht, AW vorgegeben

$$(1)\quad \underbrace{E_i(\vec{r},t=0)}_{\text{sei bekannt}} \qquad (2)\quad \underbrace{\partial_t E_i(\vec{r},t=0)}_{\text{sei bekannt}}$$

Ziel: Berechnung $\vec{E}(\vec{r},t)$ $\forall$ Zeiten

einfachstes Beispiel: 1d, 1 Polarisation $\rightarrow$ $E(x,t)$

$$E(x,t) = \frac{1}{2}\int dk\, E(k)\, e^{i(kx-\omega(k)t)} + c.c.$$

Fourierdarstellg.

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \int dk$$

$$\underset{\text{bekannt}}{E(x,0)} = \frac{1}{2}\int dk\, E(k)\, e^{ikx} + \frac{1}{2}\int dk\, E^*(k)\, e^{-ikx}$$

$$\underset{\text{bekannt}}{\partial_t E(x,0)} = \frac{1}{2}\int dk\,(-i\omega(k))\, E(k)\, e^{ikx} + \frac{1}{2}\int dk\,(i\omega(k))\, E^*(k)\, e^{-ikx}$$

$E(k)$ wird benötigt und aus AW berechnet

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, E(x,0)\, e^{-ikx} = \frac{1}{2}\left(\underline{E(k)} + E^*(-k)\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \dot{E}(x,0)\, e^{-ikx} = \frac{1}{2}\left(-i\omega(k)E(k) + i\omega(-k)E^*(-k)\right)$$

$$\hat{=}\ \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx}\int_{-\infty}^{+\infty} dk' E(k')\, e^{ik'x}$$

Rücktrafo von diesem Term

Nebenrechnung

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dk'\, E(k') \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-i(k-k')x}}_{\delta(k-k')}$$

$$= \frac{1}{2}\int dk'\, E(k')\, \delta(k-k') = \frac{1}{2}E(k)$$

Gleichungssystem f. $E(k)$:

$$\Rightarrow E(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-ikx}\left(E(x,0) - \frac{\partial_t E(x,0)}{i\omega(k)}\right)$$

und $\omega(-k) = \omega(|k|) = \omega(k)$

$\rightarrow$ Damit ist Feld bestimmt. über $E(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, E(k) \dots$

Beispiel: $E(x,0) = 2\delta(x)$, $\partial_t E(x,0) = 0$

$$\tilde{E}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, 2\delta(x)\, e^{-ikx} = \frac{1}{\pi}$$

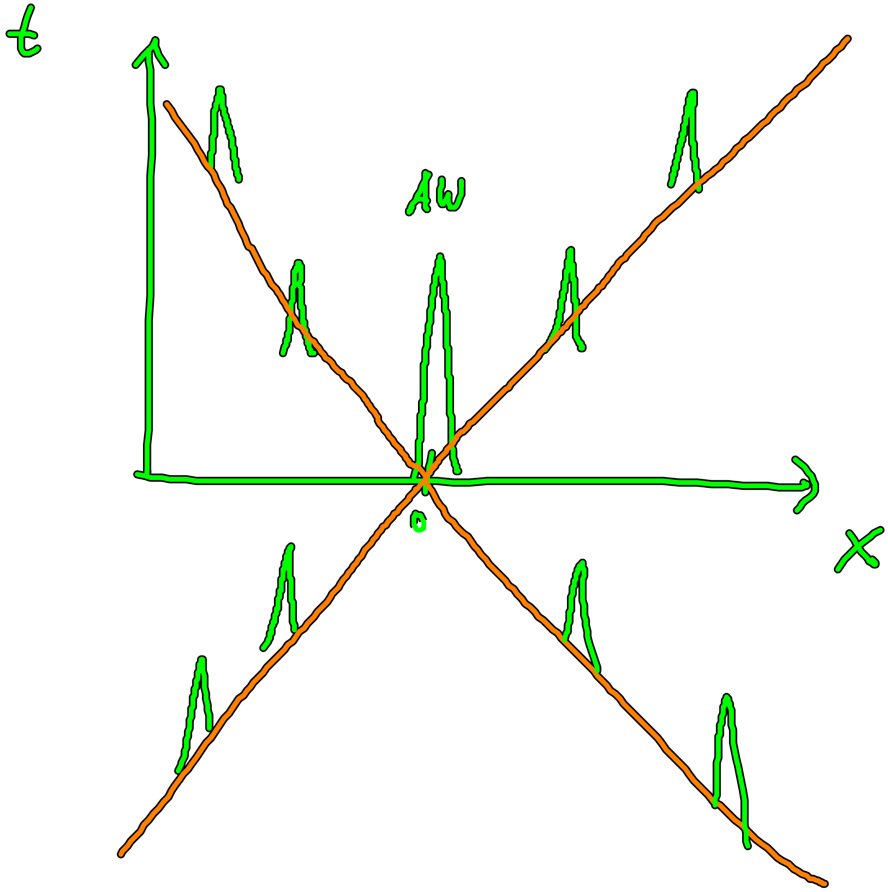
$$E(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, \tilde{E}(k)\, e^{i(kx - \overbrace{\omega(k)}^{c|k|} t)} + c.c.$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} dk\, e^{ikx + ckt} + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} dk\, e^{ikx - ckt} + c.c.$$

$k \to -k$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{i(kx + ckt)} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{i(kx - ckt)}$$

$$\boxed{E(x,t) = \delta(x+ct) + \delta(x-ct)}$$



2 Pulse die bei $x = \pm\infty$ starten

und übereinander verlauft bei $x = 0$

5. Anwesenheit v. Ladungen / Strom :

Felder aus Potentialen

Felder + Ladungen zulassen $\quad E, B \; (\rho(\vec r, t), \vec j(\vec r, t))$

Idee : erst Potentiale berechnen

$$\vec B = \vec \nabla \times \vec A$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$$

wenn Potentiale bekannt sind können die Felder sofort berechnet werden

A, ϕ sind gegeben durch die Lagrangegleichungen f. Felder

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2 \phi + \partial_t \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \vec{A} - \nabla\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi\right) = -\mu_0 \vec{j} \end{aligned}}$$

wenn $\rho, \vec{j}$ bekannt $\rightarrow \vec{A}, \phi$

alternative Methode die Gleichungen $\Box$ zu bekommen ist die Maxwellgl. zu verarbeiten:

Tutorium / Bücher

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

weil $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\,.\,) \equiv 0$

Verwendung v. $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t \vec{B} \rightarrow \vec{E} = \dots$

2nd Maxwellgl. führt auf $\Box$

Potentialgl. sind unschön: schlimmer als Maxwellgleichg.

A und ϕ sind gekoppelt

aber: Eichtrafo erlaubt es Potentiale zu ändern:

$$\vec{A} \to \vec{A}' = A + \nabla \chi$$

$$\phi \to \phi' = \phi - \partial_t \chi$$

(i) Messgrößen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ändern sich nicht, wenn $\vec{A} \to \vec{A}'$, $\phi \to \phi'$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (A + \nabla \chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \chi}_{=0}$$

$$\vec{B} = \vec{B}' \quad \text{analog} \quad \vec{E} = \vec{E}'$$

(ii) Maxwellgl. sind invariant gegen die Trafo (ÜA)

Ziel: χ als Freiheitsgrad, der geschickt verwendet wird, nehmen χ's konstruieren die entkoppelte Potentialgleichg. erzeugen

Start: $A, \phi \longrightarrow A', \phi'$

$\boxed{\text{kompliziert}}$ $\qquad\qquad$ $\boxed{\text{einfach}}$

Lorenzeichung: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi' = 0$

Coulombeichung: $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0$

beide Mgl. entkoppeln die Gleichung

χ: Eichfunktion

5.2. Lorenzeichung

wähle χ so daß $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi' = 0$

$$\boxed{\left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\phi' = -\rho/\varepsilon_0 \; ; \; \left(\vec{\nabla}^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\vec{A}' = -\mu_0 \vec{j}}$$

entkoppelte Wellengleichungen f. ϕ', $\vec{A}'$

mit Quelle ρ, $\vec{j}$

Bemerkungen:

a) symmetrische Formulierg. in ϕ, $\vec{A}$ (identische Gleichungen)

$\longrightarrow$ einfache relativistische Schreibweise

→ Konsistente Behandlung bei Näherungen

b) welches χ bringt uns v. $\vec{A} \to \vec{A}'$, $\phi \to \phi'$

$$\vec{\nabla}^2 = \nabla^2 \equiv \Delta$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \qquad \phi' = \phi - \partial_t \chi$$

versuch die Lorenzbedgg. zu konstruieren:

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\partial_t \phi'} \overset{!}{=} 0$$

$$\to \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \Delta\chi + \frac{1}{c^2}\left(\partial_t\phi - \partial_t^2\chi\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\boxed{\Delta\chi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\chi = -\vec{\nabla}\cdot\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t\phi}$$

Wellengleichg. f. χ, durch Konstruktion ist χ dadurch bestimmt

5.3. Coulombeichung

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0 \qquad \vec{A}' \text{ ist quellfrei}$$

$$\boxed{\nabla^2\phi' = -\rho/\varepsilon_0\,, \quad \nabla^2\vec{A}' - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A}' = -\mu_0\vec{j} + \frac{1}{c^2}\partial_t\vec{\nabla}\phi'}$$

ist noch nicht entkoppelt, gleich ... (rechte Seite: nur $\vec{j}$ bestimmt)

Bemerkungen:

a) unsymmetrische Formulierung
(Poissongleichung ϕ', Wellengleichg. $\vec{A}'$)

$\longrightarrow$ Quantenmechanik in Feld gemacht

oft: $\langle j \rangle = 0 \longrightarrow$ alles d. $\underline{\underline{\phi'}}$ bestimmt (einfachere Gleichg. als Wellengleichg.)

$\Leftrightarrow \langle \vec{A} \rangle = 0$

b) welches χ nimmt man:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' \overset{!}{=} 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) \overset{!}{=} 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \Delta\chi \overset{!}{=} 0$$

$$\boxed{\Delta\chi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A}}$$

χ ist als Lösg. einer Poissongleichg. konstruiert

c) umschreiben von $\frac{1}{c^2} \partial_t \nabla \phi'$

$$\phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

ist Lsg. der 1. Potentialgleichg.
in 2. Gleichg. einsetzen

$c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\partial_t \rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= -\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int d^3r' \frac{-\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$ Kontinuitätsgl.

partielle Integration

$$= -\mu_0 \int d^3r' \, \vec{j}(\vec{r}',t)\, \delta(\vec{r}-\vec{r}') - \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{\nabla}'\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

verwende $\vec{\nabla}'^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi \, \delta(\vec{r}-\vec{r}')$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\overbrace{-\nabla'^2 \vec{j}(\vec{r}',t) + \vec{\nabla}'\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{r}',t)}^{\vec{\nabla}' \times \vec{\nabla}' \times \vec{j}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$= -\mu_0 \vec{j}_T$$

$$\vec{j}_T = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

5.4 Übersicht

Coulombeichung

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_T$$

Lorenzeichung

$$\Box \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \Box \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$