5.5 Lösung der Potentialgleichungen

5.5.1. Formale Lösung d. Greensfunktion

Potentiale über Wellengleichung gegeben:

$\Psi \rightarrow \phi, A_x, A_y, A_z$

$$\Box \Psi(\vec{r},t) = \Delta \Psi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 \Psi = -4\pi \rho(\vec{r},t)$$

wobei ϕ in Coulombeichung $c \rightarrow \infty$ erfordert zur Lösg der Poissongleichung

$\rho(\vec{r},t)$ kann entsprechend Strom- oder Ladungsdichte sein

Ziel ist die Lösung dieser Wellengleichung:

Hilfsmittel: Greenfunktion $G(\vec r, \vec r\,', t, t')$

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G(\vec r, \vec r\,'; t, t') = -4\pi\,\delta(\vec r - \vec r\,')\,\delta(t-t')$$

wirkt auf $\vec r$

Greensche Fkt beschreibt eine Welle die durch kurzzeitiges Anschalten zur Zeit t' einer Quelle am Ort $\vec r\,'$ erzeugt wird.

Wenn G bekannt, so ist:

$$\Psi(\vec r, t) = \int d^3r' \int dt' \underbrace{G(\vec r, \vec r\,', t, t')}_{\text{muß zuvor ausgerechnet werden}} f(\vec r\,', t')$$

warum? Ψ erfüllt die Wellengleichung (Beweis)

$$\Box\, \Psi(\vec r, t) = \int d^3r' \int dt'\, \underbrace{\Box\, G(\vec r, \vec r\,', t, t')}_{-4\pi\,\delta(\vec r - \vec r\,')\,\delta(t-t')} f(\vec r\,', t')$$

$$\Box \Psi(\vec r, t) = -4\pi \rho(\vec r, t)$$

wenn man G hat, dann hat man die volle Lösung $\Psi(\vec r, t)$

Bemerkungen:

a) zunächst kann $G(\vec r, \vec r', t, t')$ nur von $G(\vec r - \vec r', t - t')$ abhängen, weil Quelle $\delta(t-t') \cdot \delta(\vec r - \vec r')$

man kann auch

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G(\vec r, t) = -4\pi\, \delta(\vec r)\, \delta(t) \quad \text{lösen}$$

b) findet später, daß es 2 Lösungen gibt: (I)

$$G^{\mp}(\vec r - \vec r', t - t') = \frac{\delta\left(t - t' \mp \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r'|}$$

nur G^+ erfüllt das Kausalitätsprinzip (später)

„ G^+ : retardierte G-Funktion "

G^- : avancierte – " –

5.5-2 Lösungen der Potentialgleichung

$$\phi(\vec r,t) \qquad \Box\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (\text{Lorenzeichg.})$$

$$\Big(\underbrace{-4\pi\,\delta(\vec r,t)}_{\text{identifizieren}} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Big)$$

$$\phi(\vec r,t) = \int d^3r' \int dt' \, \underbrace{G^{+}(\vec r-\vec r', t-t')}_{\frac{\delta\left(t' - \left[t - \frac{|\vec r-\vec r'|}{c}\right]\right)}{|\vec r-\vec r'|}} \, \frac{\rho(\vec r', t')}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\phi(\vec r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho\left(\vec r', t - \frac{|\vec r-\vec r'|}{c}\right)}{|\vec r-\vec r'|}}$$

Lösg. f. skal. Potential in Lorenzeichg. gefunden

$c\to\infty$

$$\boxed{\phi(\vec r,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec r', t)}{|\vec r-\vec r'|}}$$

skal. Potential in Coulombeichung

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\vec{j}\left(\vec{r}\,',\, t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

Vektorpotential in Coulomb (T) bzw. Lorenzeichg ~~(T)~~

Bemerkungen:

a) $\rho, \vec{j}$ bestimmen $\vec{A}$ und ϕ durch Integration

Potentiale unterscheiden sich (!) in den verschiedenen Eichungen

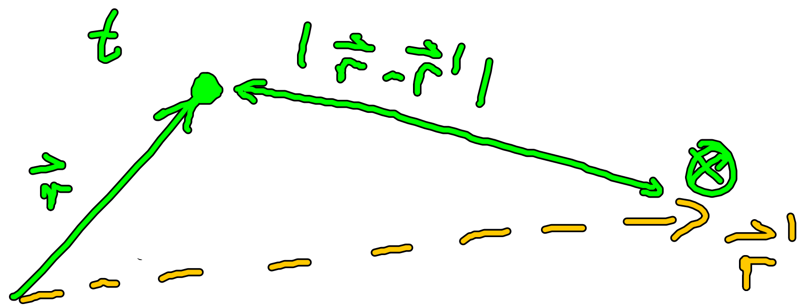
Felder sind invariant!

b) man nennt die Potentiale mit der Variablen

$$t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$$ die retardierten Potentiale

(„zeitverzögert")

Beobachtg. v. $\vec{A}(\vec{r},t)$ am Ort $\vec{r}$ zur Zeit t



bei $\vec r$ und t erscheint ein Vorgang bei $\vec r'$ geschieht um

Laufzeit $\frac{|\vec r - \vec r'|}{c}$ <u>verzögert</u>

c) im Gegensatz dazu

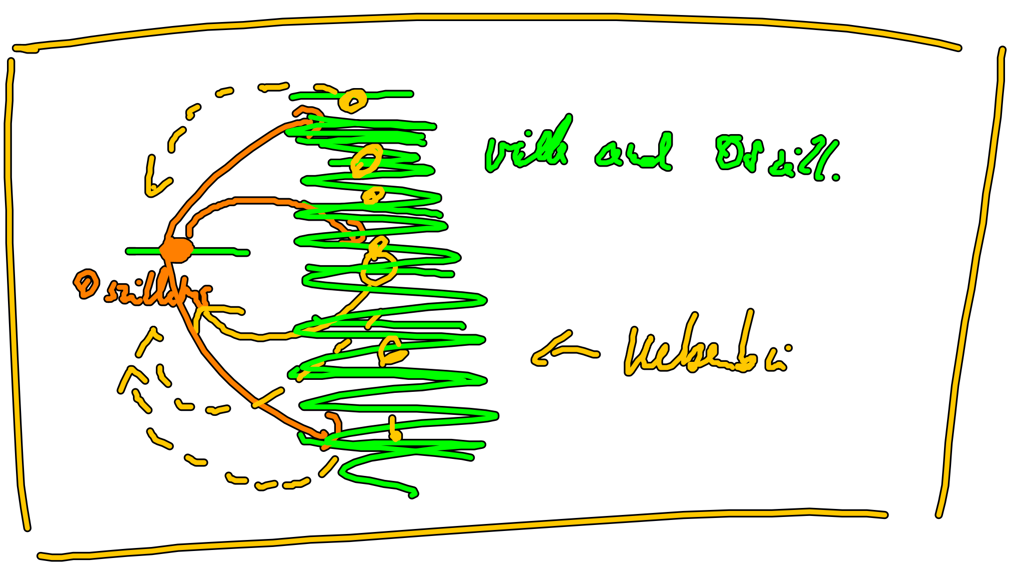
avancierte Lsg. hätte Variable $t + \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}$

d.h. Wirkung kommt vor Ursache!

nicht kausale Lösung.

beide Lösungen $\exists$ mathematisch

nur die retardierte wird gebraucht.



<u>5.5.3. Bedeutg. d. Greenfunktion</u>

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right) G(\vec{r},t) = -4\pi\,\delta(\vec{r})\,\delta(t) \qquad (*)$$

ist zu lösen

$$G(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3q \int d\omega \; e^{i(\vec{q}\vec{r}-\omega t)} \underbrace{G(q,\omega)}_{\text{FT von } G(\vec{r},t)}$$

weil 4 comp. $4\times$ FT

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3q \; e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int d\omega \; e^{-i\omega t}$$

Fouriertrafo der Wellengleichung f. G $(*)$

$$\underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4}\left(-\vec{q}^{\,2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)}_{\text{teilen}} G(\vec{q},\omega) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\,1$$

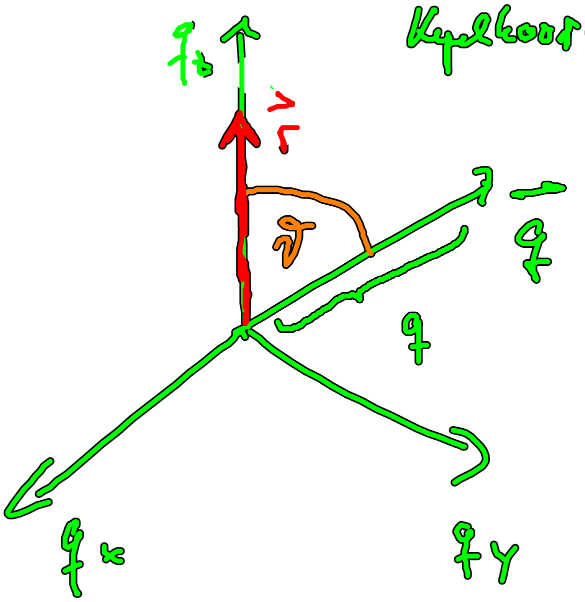
$$G(\vec{q},\omega) = -\frac{4\pi}{\left(-q^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)} \qquad \text{Lsg. in Fourierraum}$$

$$G(\vec r, t) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int d^3q \int d\omega\, e^{i(\vec q\cdot\vec r-\omega t)}\,\frac{1}{-q^2+\frac{\omega^2}{c^2}}$$

fest in z-Richtg. gewählt

Trick: Pol

Kugelkoordinaten



$$G(\vec r, t) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}\int_0^{\infty} dq\, q^2 \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta\,\sin\vartheta \,\frac{e^{iqr\cos\vartheta}}{-q^2+\frac{\omega^2}{c^2}}}_{----}$$

$$\cdots \int_0^{\pi} d\vartheta\,\sin\vartheta\, e^{iqr\cos\vartheta} = \frac{2}{qr}\sin(qr)$$

$$(x = \cos\vartheta)$$

$$= -\frac{4\pi c^2}{(2\pi)^4}\int_0^{\infty} dq\, q\,\frac{\sin qr}{r}\,4\pi\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\,\frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2-c^2q^2}$$

$$= -\frac{c^2}{\pi^2 r}\int_0^\infty dq\, q \sin qr \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \frac{e^{-i\omega t}}{\omega^2 - c^2 q^2}}$$

$f(\omega)$

über Residuensatz: $-\frac{2\pi}{cq}\sin(cqt) \quad t>0$

analytische Fortsetzung d. Funktion $f(\omega) \to f(z)$

$z \in \mathbb{C}$ komplexe Zahl

$\boxed{\underbrace{t<0}_{\text{avancierte Fkt.}}}$

$$G^+(\vec r, t) = \frac{2c}{\pi r}\underbrace{\int_0^\infty dq\, \sin(qr)\sin(cqt)}$$

$|\vec r - \vec r'|$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty dq\, \left(e^{iqr} - e^{-iqr}\right)\sin(cqt)$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^\infty dq\, e^{iqr}\sin cqt + \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^0 dq\, e^{iqr}\sin cqt$$

$\boxed{q \to -q}$

$$= \frac{1}{2i}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dq\, \left(e^{iq(r+ct)} - e^{iq(r-ct)}\right)}\frac{1}{2i}$$

Def. d. δ-Fkt.

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iyx} \, dy$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\delta(r - ct) - \cancel{\delta(r + ct)} \right) \qquad \underline{t > 0}$$

$$\longrightarrow \quad G^{+}(\vec{r}, t) = \frac{c}{r} \, \delta(r - ct)$$

$$\boxed{G^{+} = \frac{\delta\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r}}$$

Damit ist die retardierte G-Fkt. gefunden!

$$G \to G(\vec{r} - \vec{r}\,', t - t') \qquad t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}$$

$$\longrightarrow \quad \delta\left(t - t' - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c} \right) \qquad \checkmark$$

$$\overline{|\vec r - \vec r\,'|}$$

$t' = t + \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}$

$t' = \left(t - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}\right)$

5.6. Statischer Grenzfall d. E-Dynamik

alle Zeitableitung $\partial_t \to 0$ oder $\underbrace{c \to \infty \text{ in Wellengleichung}}_{\frac{1}{c^2}\partial_t^2 \to 0}$

statische Felder!

$\cancel{t - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}}$

Elektrostatik

$$\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

Magnetostatik

$$\vec A = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec j(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}$$

man kann auch diese Potentiale direkt aus den Maxwellgl. bekommen.

$\vec\nabla \times \vec E = 0 \qquad \vec\nabla \cdot \vec E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec\nabla \cdot \vec B = 0 \qquad \vec\nabla \times \vec B = \mu_0 \vec j$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \qquad \underbrace{-\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\phi} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Poissongl. d. Elektrostatik

und die Lsg.

$$\boxed{\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \qquad \underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}}\times\vec{A} = \mu_0\vec{j}$$

$$\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot - \Delta$$

Coulombeichg. $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$

$$\boxed{\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}}$$

$$\boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

Poissongleichg. d. Magnetostatik