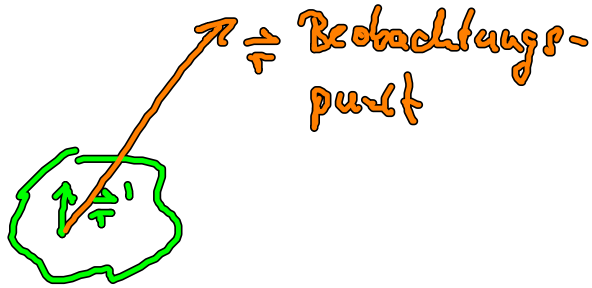
Zusammenfassung Fernfeld- (bzw. Multipol-) Entwicklung der Elektrostatik:



$\rho(\vec{r}\,')$, innerhalb

$|\vec{r}\,'| \ll |\vec{r}|$

$$\phi = \sum_n \phi_n$$

mit ϕ_n - Anteilen die mit $\frac{1}{r^n}$ skalieren

also im Fernfeld an Bedeutung verlieren

$$\phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} + \frac{1}{2}\,\frac{\vec{r}^{\,T}\cdot\hat{Q}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^5} + \ldots$$

Monopolterm (Punktladung) Dipolterm (math. Dipol) Quadrupolterm (math. Quadrupol)

__Achtung__: Definition v. höheren Momenten $\vec{d}$, $\hat{Q}$ sind i.a. abhängig vom Koordinatensystem $(\vec{r}\,')$

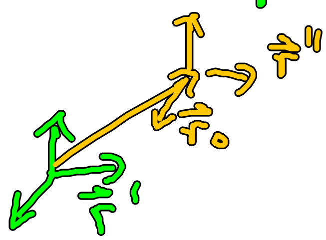
__Bsp__: Dipolmoment $\vec{d} = \int d^3r'\, \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,')$

(Integral)

1. Moment der Ladungsverteilung
bzw. Schwerpunkt der Ladungsdichte,
analog in Mechanik: Massendichte

KS verschiebung: $\vec r\,' \to \vec r\,' + \vec r_0$

konstanter Vektor



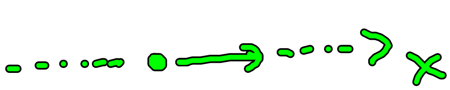
$$\vec d\,' = \int d^3r''\, \vec r\,'' \rho(\vec r\,'') = \int d^3r' \left(\vec r\,' + \vec r_0\right) \rho(\vec r\,' + \vec r_0) =$$

$$= \underbrace{\int d^3r'\, \vec r\,' \rho(\vec r\,' + \vec r_0)}_{\vec d\,'} + \underbrace{\int d^3r'\, \vec r_0\, \rho(\vec r\,' + \vec r_0)}_{\sim \underbrace{\int d^3r' \rho(\vec r\,' + \vec r_0)}_{\text{Gesamtladungsdichte } Q}}$$

wenn $Q = 0$, dann Korrektur $= 0$

Die Momente sind eindeutig wenn das vorherige Moment verschwindet ($Q = 0 \Rightarrow \vec d$ eindeutig).

6.3. Gleichförmig-geradlinig bewegte Punktladung



Bewegung entlang der x-Achse.

v_x = konstant

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} = \frac{\dot{\vec{r}}_0(t)}{c} \quad ; \quad \dot{\vec{\beta}} = 0 = \text{Beschleunigung}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(1-\beta^2)(\vec{e}_R - \vec{\beta})}{R^2\,(1-\vec{\beta}\cdot\vec{e}_R)^3}\right)\Bigg|_{t' = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}} + \cancel{\text{Fernfeld}}(\dot{\vec{\beta}})$$

$$t' = t'(\vec{r},t)$$

$$\vec{\beta} = \vec{\beta}(t')$$

$$\vec{R} = \vec{R}(t')$$

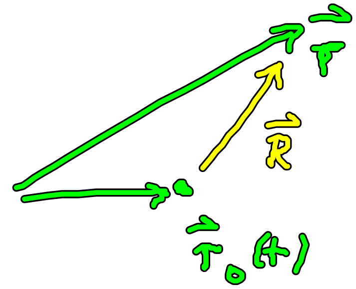
$$\vec{e}_R = \vec{e}_R(t') = \vec{e}_R(t'(t,\vec{r}))$$

$t' = t'(\vec{r},t)$ muss bestimmt werden

$$t' = t - \frac{x - v_x t'}{c} \xrightarrow[\text{umstellen}]{} t' = \frac{t - x/c}{1-\beta}, \quad \beta = \frac{v_x}{c}$$

$$(x > v_x t')$$

$t' = t'(\vec r, t)$ bekannt



wenn $\left.\begin{array}{l} \vec e_R{}' \equiv \vec e_R(t') \\ \vec e_R \equiv \vec e_R(t) \end{array}\right\}$ kurz Notation

$$\underbrace{\vec e_R{}' - \underset{\text{konst}}{\vec \beta}} = \frac{\vec R'}{|\vec R'|} - \vec\beta = \frac{\vec R' - \vec\beta R'}{R'}$$

$|\vec R'| = R'$

$$\vec R(t') = \vec r - \vec r_0(t')$$

$\vec\beta$

$$x \text{ Komponente} = \frac{(x - vt') - \beta(x - v_x t')}{R'}$$

$$= \frac{(1-\beta)(x - v_x t')}{R'} \qquad t' = t'(x,t) \qquad \beta = \frac{v_x}{c}$$

$$= \frac{(1-\beta)\left(x - v_x\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)}{R'} = \frac{x - v_x t}{R'} = \frac{x - x_0(t)}{R'}$$

$$\boxed{\vec{e}_R{}' - \vec{\beta} = \frac{\vec{R}(t)}{R'}}$$

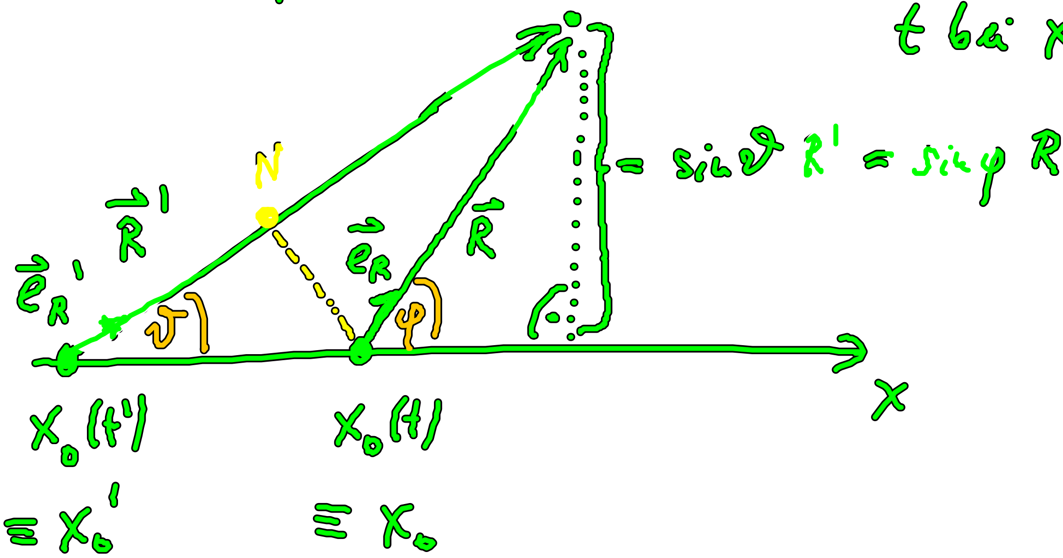
t

t'

Punktladung z. Zeit t' bei x_0'

t bei x_0

Beobachtungspkt. $P(\vec{r})$



$$\vec{e}_R{}' - \vec{\beta} = \, ? \, = \frac{\vec{R}}{R'}$$

$$\underbrace{\left(1 - \vec{e}_R{}' \cdot \vec{\beta}\right)} = \, ?$$

$$\beta = \frac{v_x}{c}$$

wird am Δ bestimmt

eliminiert

$$\overline{X_0' X_0} = v_x (t - t') = v_x \frac{(x - v_x \cdot t')}{c} = \beta R'$$

$$\overline{X_0' N} = \overline{X_0' X_0} \cdot \cos\vartheta = \beta R' \underbrace{\cos\vartheta}_{} = R' \vec{e}_R{}' \cdot \vec{\beta}$$

Skalarprodukt

$$\overline{NP} = R' - \overline{X_0' N} = R' - R' \beta \cos\vartheta$$

$$= R' (1 - \vec{e}_R{}' \cdot \vec{\beta})$$

$$\overline{NP}^2 = R^2 - \overline{N X_0}^2 = R^2 - \overline{X_0' X_0}^2 \sin^2\vartheta$$

Pythagoras

$\downarrow$ von 1. Zeile

$$= R^2 - R'^2 \beta^2 \sin^2\vartheta$$

quadriere die 1. Zeile und gleichsetze mit letzter Zeile

$$R'^2 (1 - \underline{\vec{e}_R{}' \cdot \vec{\beta}})^2 = R^2 - R'^2 \beta^2 \sin^2\vartheta =$$

$$= R^2 - R^2 \beta^2 \sin^2\varphi$$

$$\boxed{1 - \vec{e}_R{}' \cdot \vec{\beta} = ?}$$

$$(1 - \vec{e}_R{}' \cdot \vec{\beta})^2 = \frac{R^2}{R'^2} (1 - \beta^2 \sin^2\varphi)$$

einsetzen in E-Feld:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(1-\beta^2)(\vec{e}_R{}' - \vec{\beta})}{R'^2 (1-\vec{\beta}\vec{e}_R{}')^3}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(1-\beta^2)\vec{R}(t)}{R^3(t)(1-\beta^2\sin^2\varphi)^{3/2}}}$$

E-Feld ein linear, gleichförmig bewegten Punktladung

Bemerkungen:

a) $1-\beta^2 \approx 1$ f. langsame Ladungen $v_x \ll c$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{R}(t)}{R^3(t)} \qquad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0(t)$$

$\exists$ statisches Feld der Punktladg. am Bewegungsort $\vec{r}_0(t)$

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}$$

$$\vec{B} \neq 0 : \quad \vec{B} = \frac{\vec{e}_R{}' \times \vec{E}}{c}$$

$$\vec{B} = \frac{q\mu_0 c}{4\pi} \frac{\vec{e}_R(t') \times \vec{R}(t)}{R^3(t)}$$

$$\vec{e}_R{}' = \vec{e}_R(t') = \vec{\beta} + \frac{\vec{R}}{R'}$$

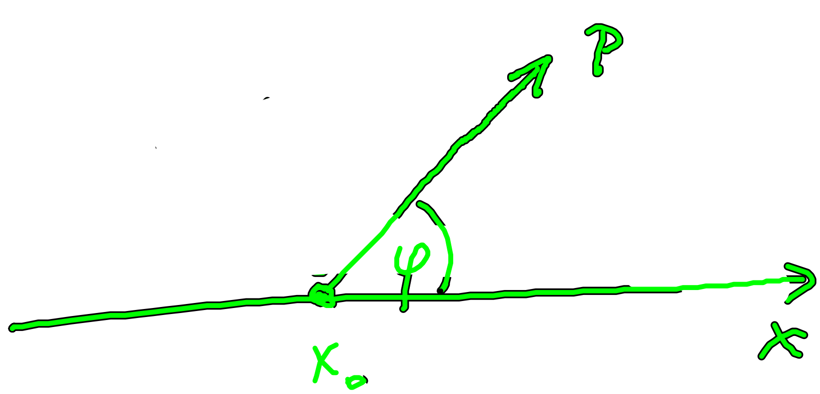
wegen $\vec{R} \times \vec{R} = 0$

$$\vec{B} = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{R}(t)}{R^3(t)}$$

Jede bewegte Ladung erzeugt ein $\vec{B}$-Feld, Ströme rufen $\vec{B}$-Felder hervor.

b) schnelle Ladungen:

Korrekturfaktor $$\frac{|E|_{\text{schnelle Ladg}}}{|E|_{\text{lgs. Ladg}}} = \frac{1-\beta^2}{\left(1-\beta^2 \sin^2\varphi\right)^{3/2}}$$



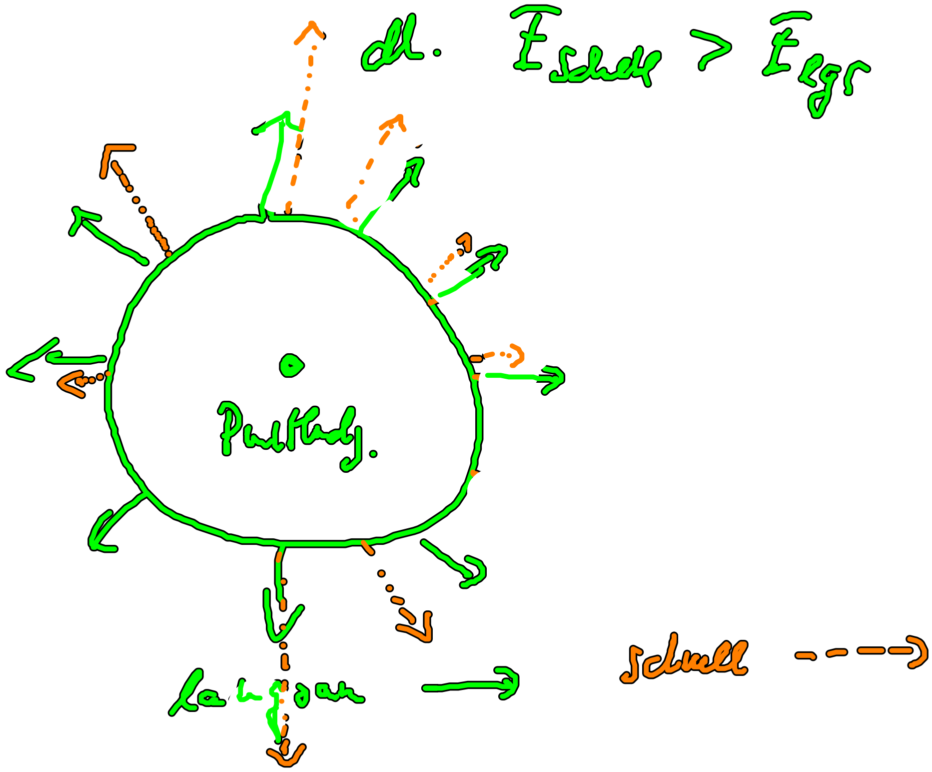
$\left.\begin{matrix}\varphi \to 0 \\ \varphi \to \pi\end{matrix}\right\}$ Korrektur: $1-\beta^2$

d.h. $E_{schnell} < E_{gs}$

$\left.\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right\}$ $\sin\varphi \to 1$

d.h. $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

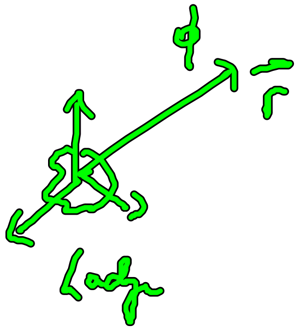
d.h. $E_{schnell} > E_{gs}$



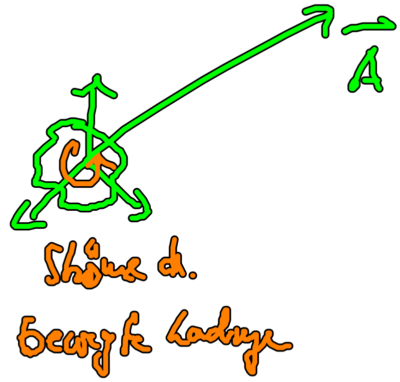
Feldlinie werden durch schnelle Bewegg $1-\beta^2$ verzerrt.

↑ wichtig im Vergleich mit 1

6.3.2. Magnetostatik: Fernfeld einer Strominsel



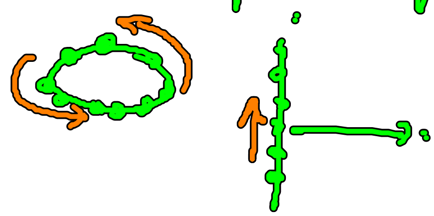
analog



$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \qquad\qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\underbrace{\rho = \text{statisch}}_{} \qquad\qquad \underbrace{j = \text{statisch}}_{}$$

d. Konstruktion mit viel Punktladungen: Strom soll zu jeder Zeit genauso aussehen



wenn man zeitunabhängige Ströme hat so kann man wieder ein Fernfeld entwickeln, diesmal d. Magnetfeld machen:

Potential in Lorenzeichung $c \to \infty$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$ statische Ströme

analog:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$ statische Ladungen

wenn $\vec{A}(\vec{r})$ gegeben ist, so bekommt man:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\vec{j}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}}$$

Biot-Savart Gesetz

Beweis:

$$\vec{\nabla}_r \times \frac{\vec{j}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \vec{e}_i \, \varepsilon_{ijk} \, \partial_j \, j_k(\vec{r}\,') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$= \vec{e}_i \, \varepsilon_{ijk} \, j_k \, \partial_j \underbrace{\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}$$

$$\partial_j \frac{1}{\left(\sum_n (x_n - x_n')^2\right)^{1/2}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial_j \left(\sum_n (x_n - x_n')^2\right)}{\left(\sum_n (x_n - x_n')^2\right)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{2 \cdot \sum_n (x_n - x_n') \overbrace{\partial_j x_n}^{\delta_{jn}}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} = - \frac{x_j - x_j'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$= -\vec{e}_i \, \varepsilon_{ijk} \, j_k \, \frac{x_j - x_j'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$$= - \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \times \vec{j}(\vec{r}\,')$$