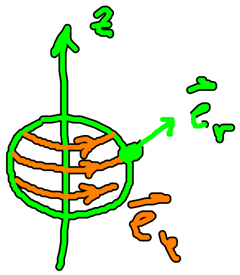
Beispiel f. Oberflächenstrom : (zu 9.3)



Oberflächenstrom auf Kugeloberfläche

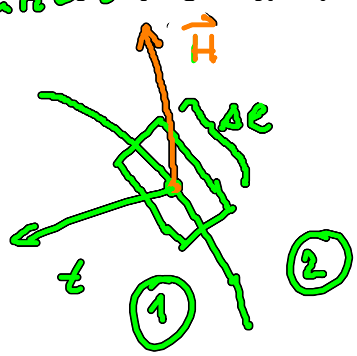
z.B. Strom durch flussene Drähte

$\vec e_r, \vec e_\vartheta, \vec e_\varphi$ ≙ Rechtssystem

$\vec k = k(\vartheta,\varphi)\, \vec e_\varphi$

Normalenvektor : eindeutig wie das zu legen ist

Tangentialvektor d. Felder wird mal diskutiert



$\Delta l \; \vec t \cdot \left(\vec n \times (\vec H_2 - \vec H_1) \right) = I$ (Strom durch die kleine Fläche)

↗ tangential an Oberfläche

zunächst beliebiger Tangentialvektor

$$\vec t \cdot \left(\vec n \times (\vec H_2 - \vec H_1) \right) = \frac{I}{\Delta l} \, \vec t \cdot \vec t$$

f. beliebiges $\vec t$ $\longrightarrow$

$$\vec n \times (\vec H_2 - \vec H_1) = \frac{I}{\Delta e}\,\vec t \equiv \vec k$$ Oberflächenstromdichte (Linienstromdichte)

↪ weil $\frac{1}{m}$ statt $\frac{1}{m^2}$ Einheit

$$\vec H = \underbrace{\vec n\, \vec H\cdot\vec n}_{\vec n H_n} + \underbrace{(\vec H - \vec n\, \vec n\cdot\vec H)}_{\vec H_t = ?}$$

Normalvektor $\vec H$ — Tangentialvektor v. $\vec H$

$$= \vec n\, H_n + \underbrace{(\vec n\cdot\vec n - \vec n\,\vec n\cdot)\,\vec H}_{-\vec n\times(\vec n\times\vec H)}$$

$$= \vec n\, H_n - \vec n\times(\vec n\times\vec H)$$

Einteilung in Normalen u. Tangentialen gewonnen

$$-\vec n \times (\vec n \times (\vec H_2 - \vec H_1)) = \vec n \times \vec k$$

$$\boxed{(\vec H_t^1 - \vec H_t^2) = \vec n \times \vec k}$$

am Bsp: $$\vec n \times \vec k = \vec e_r \times k(\vartheta,\varphi)\,\vec e_\varphi$$
$$= \vec e_r \times \vec e_\varphi\, k(\vartheta,\varphi)$$
$$= -\vec e_\vartheta\, k(\vartheta,\varphi)$$

Tangentialkomponente zeigt in $\vec e_\vartheta$-Richtung.

9.4. Makroskopische Theorie f. Stoffe

$\omega \to 0$, stationäre Maxwellgl.

um Stetigkeitsbedingungen anzuwenden muß man Materialgl.

haben: $D = D(E)$, $H = H(\vec{B})$

$$\underbrace{D_n \ , \ \vec{E}_t}_{\text{muß einheitlich formuliert werden über Materialgleichungen}}$$

9.4.1. Dielektrika

$$\ddot{\vec{P}} + \omega_0^2 \vec{P} + \gamma \dot{\vec{P}} = \frac{q^2 n_0}{m} \vec{E}$$

oszillierende Dipoldichte $\vec{P}$ angetrieben d. $\vec{E}$-Feld (n_0 : Dipoldichte)

statisch: $\vec{P} = \dfrac{q^2 n_0}{m \omega_0^2} \vec{E}$

$$\vec{P} = \underbrace{\vec{P}_0}_{\text{permanente Dipole}} + \underbrace{\frac{q^2 n_0}{\omega_0^2 m} \vec{E}}_{\text{induzierte Dipole}} = \vec{P}_0 + \varepsilon_0 \chi_d \vec{E}$$

(Orientierungs-polarisation)

Ferroelektrika

$$\chi_d = \frac{q^2 n_0}{\varepsilon_0 \omega_0^2 m}$$

Suszeptibilität (wie stark polarisierbar)

häufigster Fall $\vec{P}_0 = 0$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_d \vec{E} \equiv \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$$

kann auch Tensor sein (anisotrope Medien)

$$\varepsilon = (1 + \chi_d) > 1$$

im Allgemeinen

$$\boxed{\text{Materialgleichung } D = D(E) : \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}} \qquad \chi_d = \chi_d(\vec{r})$$

Lösung in den Bereichen 1+2, wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ verschieden:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right)$$

Dielektrikum

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}) \right) = 0}$$

Feldgleichg. f. dielektrischen Fall

f. stückweise Konstante ε wird's einfach:

f. i-tes Gebiet: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_i = 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_i = 0 \rightarrow \vec{E}_i = -\vec{\nabla} \phi_i$$

$\Delta \phi_i = 0$ Laplace gleichg. f. i-te Gebiet

alternativ: $\boxed{\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon(\vec{r})\, \vec{\nabla} \phi) = 0}$

§4.2. Magnetika (magnet. Stoffe)

$\vec{M}$ Magnetisierungsdichte

analog zu $\vec{P}$:

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \mu_0 \chi_m \vec{H}$$

Permanentmagnete — magnetische Suszeptibilität

Materialgleichg.: $B = B(H)$ gesucht

$$\vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\vec{B} - \vec{M})$$

$$\leadsto \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \underbrace{\vec{M}_0 + \mu_0 \chi_m \vec{H}}_{\text{kompliziertes Zusammenspiel}}$$

$$\overset{!}{=} \mu_0 \mu \vec{H}$$

f. jeden Stoff konstant ansehen

i.a. $\mu = \mu(\vec{H})$

(i) Permanentmagnete: $\vec{M}_0 \neq 0$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 = \vec{\nabla}\cdot\left(\mu_0 \vec{H} + \vec{M}_0\right)$$

$$\Downarrow \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = -\frac{\vec{\nabla}\cdot\vec{M}_0}{\mu_0} = -\frac{\rho_{magn.}}{\mu_0}$$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{M} \equiv \rho_{magn}$

↗ Dipoldichte

im Außenraum d. Permanentmagnete

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = 0 \,, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{H} = 0$$

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\phi_M$$

↖ magnet. Potential

$$\boxed{\Delta\phi_M = 0}$$

Laplacegleichung!

(ii) Dia / Paramagnete $\quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 = \vec{\nabla}\cdot\left(\mu_0 \mu(\vec{r})\, \vec{H}(\vec{r})\right)$$

analog zu $\vec{E}, \vec{D}$

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\left(\mu(\vec{r})\,\vec{\nabla}\phi_M\right) = 0}$$

oder stückweise konstant

$$\Delta\phi_M^i = 0 \quad \text{f. } i\text{-tes Gebiet}$$

Laplace gleig.

9.4.3. Ideale Metalle

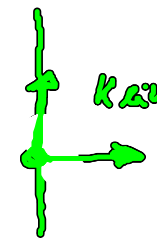
$\vec{j}_m$, ρ_m makroskop. Ströme, Ladungen $\exists$

Statik: keine Zeitabhängigkeit

Metall

feldfrei

$\vec{E} = 0$



Keine Kraft darf wirk. $\vec{E}_t \stackrel{!}{=} 0$

$\vec{E}_n \neq 0$

$$\underbrace{\vec{j}}_{\text{muß Null sein (Statik)}} = \sigma \cdot \vec{E}$$

ideal $\sigma \to \infty$ (Leitfähigkeit)

$\Rightarrow \vec{E} \to 0$

sowohl innen als auch außen gilt die Laplacegleichung.

$$\Delta \phi = 0$$

9.5. Lösung der Laplacegleichung d. orthogonale Funktionen

$\Delta \phi = 0$ $\qquad \phi$ gesucht als allg. Lösung.

Konkrete Lsg. wird durch Randbedingg. festgelegt

jede Lsg. $\phi(\vec{r}) = \sum_n a_n f_n(\vec{r})$

$\{ f_n(\vec{r}) \}$ Funktionensystem

(vollständig, orthogonalisiert)

$$a_n = \int d^3r \, f_n^*(\vec{r}) \, \phi(\vec{r})$$

geometrie angepasstes Funktionensystem finden:

z.B. $\{ e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \}$, $\{$Polynome$\}$, $\{$Kugelfunktion$\}$

$\Delta \phi$ kann durch Separation gelöst werden und zerfällt dann in Eigenwertprobleme.

z.B. Kugelkoordinaten:

$$\phi = \underbrace{\frac{u(r)}{r} \, P(\vartheta) \, Q(\varphi)}_{\text{je weils 1 Eigenwertproblem}}$$

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \left(a_{lm} r^l + b_{lm} \, r^{-(l+1)} \right) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

a_{lm}, b_{lm} : Entwicklungskoeffizienten

m, l : analog d. Quantenzahlen im H-Atom

für zylindersymmetrische Probleme $(m = 0)$

$$\phi(\vec r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_\ell r^\ell + b_\ell r^{-(\ell+1)}\right) P_\ell(\cos\vartheta)$$

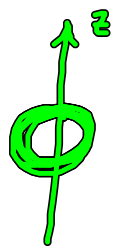
a_ℓ, b_ℓ: Koeffizienten, zu bestimmen aus Randbedingungen

P_ℓ: Legendrepolynom

Beispiel: strombelegte Kugel – 3 auf einen Streich

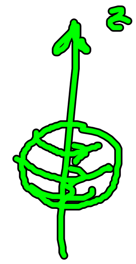
$$\vec K = K(\vartheta)\,\vec e_\varphi$$

(i)



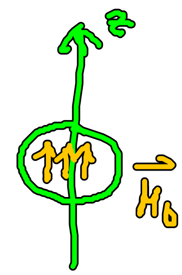
rotierende Kugel mit OF-Ladungsdichte

(ii)



gewickelte Kugel mit Strom durchflossenem Draht

(iii)



homogen magnetisierte Kugel $\vec J = \frac{1}{\mu_0}\vec\nabla\times\vec M_0$

allg. Ansatz f. innen / außen

$$\phi_M = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(a_\ell r^\ell + b_\ell r^{-(\ell+1)}\right) P_\ell(\cos\vartheta)$$

innen: $\phi_M = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell r^\ell P_\ell(\cos\vartheta)$

$b_\ell = 0$, $\frac{1}{r^{\ell+1}} \to \infty$ bei $r=0$: unphysikalisch außen: $\phi_a = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \, r^{-(l+1)} \, P_l(\cos\vartheta)$

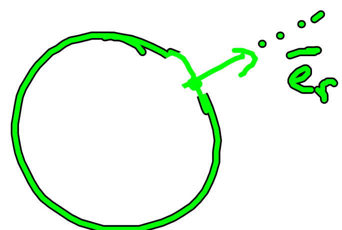
$a_l = 0$, $r^l \to \infty$ bei $r \to \infty$: unphysikalisch

a_l, b_l die ordentlich über RB bestimmen:

(i) Normale v. $\vec{B}$:

$$B_1^\perp = B_2^\perp \Big|_{r=R}$$ R: Kugelradius

$$\partial_r \phi_1 = \partial_r \phi_2$$



(Kugelkoord., Gradient in Kugelkoord.)

$$\sum_{l=0} \underbrace{\left(a_l \, l \, r^{l-1} + (l+1) b_l \, r^{-(l+2)} \right)}_{=0} \underline{P_l(\cos\vartheta)} \doteq 0 \Big|_{r=R}$$

linear unabhängig

$$\frac{a_l}{b_l} = -\frac{(l+1)}{l} R^{\underbrace{-(l+2)-(l-1)}_{\to -(2l+1)}}$$

z.B. $l=1$: $\frac{a_1}{b_1} = -2R^{-3}$, $a_1 = -2R^{-3} b_1$

(ii) Tangentialkomponente: $\vec{H}_2^t - \vec{H}_1^t = K(\vartheta)\,\vec{e}_\vartheta$

$\hookleftarrow K(\vartheta) = K_0 \sin\vartheta$

wieder fordern & ersetzen in Kugelkoordinaten

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi_1}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\partial \phi_2}{\partial \vartheta} \right) = K_0 \sin\vartheta \Big|_{r=R}$$

$$\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty} \left(b_l\, r^{-(l+1)} - a_l\, r^l \right) P_l'(\cos\vartheta) = K_0 \sin\vartheta \Big|_{r=R}$$

$$-P_1' = \nearrow$$

Koeffizientenvergl. f. P_l's:

$$\left(b_1 \frac{1}{R^3} - a_1 \right) = K_0$$

$\longrightarrow$ 2 Gleichungen f. a_1, b_1

$$b_1 = \frac{K_0 R^3}{3}, \quad a_1 = -\frac{2}{3} K_0$$

a_l, b_l f. $l \neq 1$ wählen wir Null

$$\phi_1 = -\frac{2}{3} K_0\, r \cos\vartheta$$: Innen: linear in r

$$\phi_2 = \frac{1}{3} K_0 \frac{R^3}{r^2} \cos\vartheta$$: Außen $\hat{=}$ Dipol

wenn die 2 Terme aus der Reihe ϕ_m ausgewertet werden

$$\vec{B} = -\vec{\nabla} \phi_M$$

$$\vec{B}_1 = \frac{2}{3} k_0 \left(\cos\vartheta \, \vec{e_r} - \sin\vartheta \, \vec{e_\vartheta} \right)$$

$$\vec{B}_2 = \frac{1}{3} k_0 R^3 \left(\frac{2\cos\vartheta}{r^3} \vec{e_r} + \frac{\sin\vartheta}{r^3} \vec{e_\vartheta} \right)$$