10. Abstrahlung vorgegebener Quellen:

Erzeugung v. elektromagnetischer Wellen

<u>Ziel</u>: zeitlich veränderliche Strom/Ladungsverteilg.:

Berechnung v. emittierten Wellen

$$\rho(\vec r, t) = \sum_\omega \rho_\omega(\vec r)\, e^{-i\omega t}$$

$$\vec j(\vec r, t) = \sum_\omega \vec j_\omega(\vec r)\, e^{-i\omega t}$$

$\rho_\omega, \vec j_\omega$: Fourieramplituden von Strom/Ladungsdichte

$\rightarrow$ beliebige Zeitabhängigkeit d. Überlagerung v. $\rho_\omega, \vec j_\omega$.

Ziel: Bestimmung der Felds außerhalb der $\rho, \vec j$ - Verteilung

$$\boxed{\vec B = \vec\nabla \times \vec A, \quad \partial_t \vec E = c^2\, \vec\nabla \times \vec B}$$

außerhalb der <u>Quelle</u> ist Kenntnis v. <u>$\vec A$</u> ausreichend

$$\vec A(\vec r, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\vec j\left(\vec r', t - \frac{|\vec r - \vec r'|}{c}\right)}{|\vec r - \vec r'|}$$

Lorenzeichung (retardierte Potentiale)

$\vec{j}$: wird von außen vorgegeben.

Fourierdarstellung einsetzen

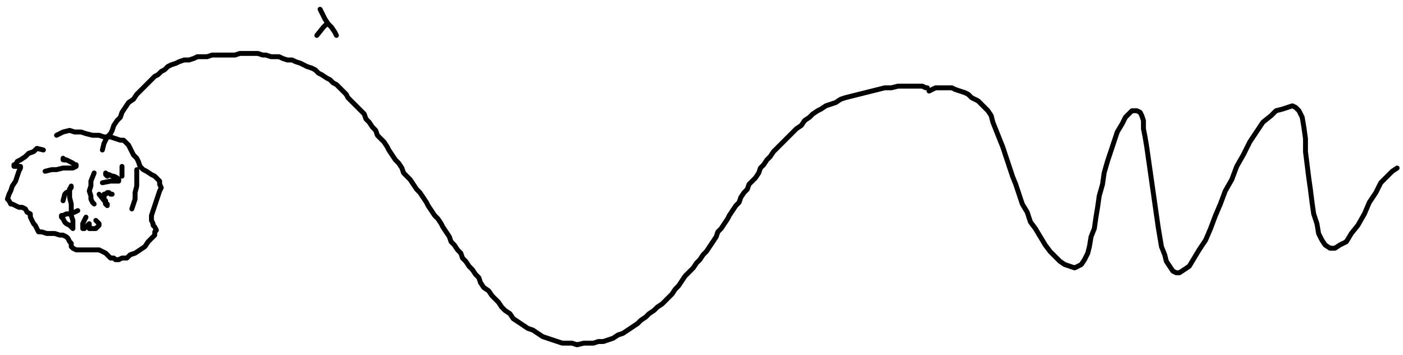
$$\sum_\omega \vec{A}_\omega(\vec{r})\, e^{-i\omega t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_\omega \int d^3r' \frac{\vec{j}_\omega(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{-i\omega\left(t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}$$

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r'\, \vec{j}_\omega(\vec{r}') \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \qquad k = \frac{\omega}{c}$$

Formel analysieren

10.1. Qualitative Diskussion v. kleinen Quellen

$$|\vec{r}'| \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}$$



Nahzone

Induktionszone $(4-5\,\lambda)$

Fernzone

$|\vec{r}| \gg \lambda$

(1) Nahzone $|\vec{r}| << \lambda$

$$k|\vec{r}-\vec{r}'| \sim \frac{1}{\lambda}|\vec{r}-\vec{r}'|$$

$$\rightsquigarrow \vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\vec{j}_\omega(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

- analog statisches Magnetfeld, aber mit ω oszillierend ($\vec{A}_\omega(\vec{r}) \hat{=}$ geometrie)

Nanooptik

- Entfernungen v. Quelle $(\vec{r})$ sind zu klein um Welleneffekte auszubilden

(2) Mittelzone / Induktionszone

Schwierig! $k\cdot|\vec{r}-\vec{r}'|$ muß mitgenommen werden.

(3) Fernzone $|\vec{r}'| << |\vec{r}|$, $\lambda \ll |\vec{r}|$

(mindestens 5λ weg v. Quelle)

allernaivster Ansatz:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\sum_\omega\int d^3r' \, \vec{j}_\omega(\vec{r}') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{-i\omega t}$$

$|\vec{r}| = r$, $\vec{r}' \to 0$

$$\approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_\omega \underbrace{\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}}_{\text{Kugelwelle}} \underbrace{\int d^3r' \, \vec{j}_\omega(r')}_{\text{Geometriefaktor}}$$

für große Entfernungen v. Quelle ist die Abstrahlung immer kugelwellenartig

10.2. Multipolstrahlung f. kleine Quellen

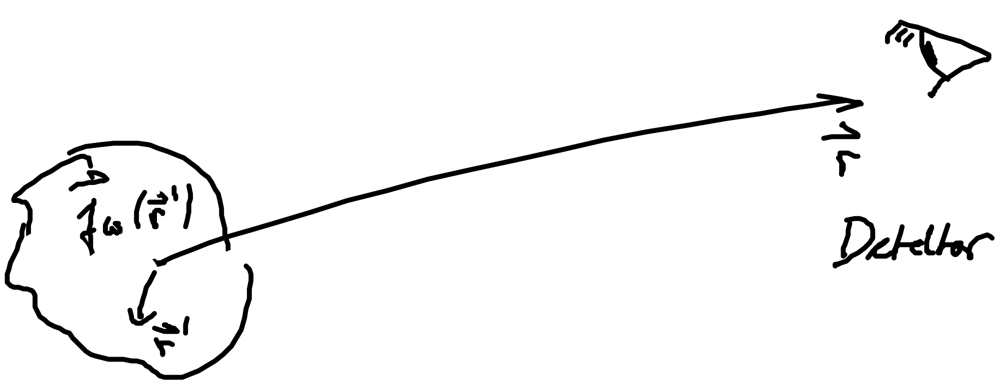
genauer werden im Fernfeld, Details d. Quelle auflösen

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_\omega \int d^3r' \, \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}_\omega(\vec{r}') \, e^{-i\omega t}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}'} \approx r - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}$$

besser behandeln

1. Ordnung Taylor



$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_\omega \int d^3r' \, \vec{j}_\omega(\vec{r}') \, \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{nullte Ordng. Taylor}} \, \underbrace{e^{-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}'}}_{\text{1. Ordng. Taylor}} \, e^{-i\omega t}}$$

(bisher λ noch offen ohne Näherg.)

Achtg.! nur $e^{i\cdots}$ wird entwickelt,

typischerweise $\frac{1}{|\cdots|}$ macht keine neuen qualitativen Effekte

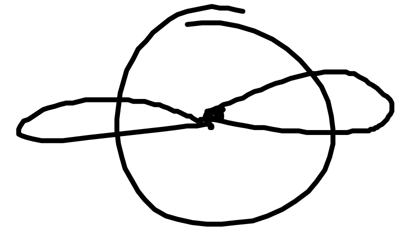
Multipolentwicklung:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_\omega \underbrace{\frac{e^{-i\omega t + ikr}}{r}}_{\text{Kugelwelle}} \int d^3r' \, \vec{j}_\omega(\vec{r}') \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}'\right)^n}{n!}}_{e^{-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}'}}$$

gilt f. $\lambda \gg |\vec{r}'|$ also f. kleine Antennen

10.3. Berechnung d. Fernfelds

$$\vec{A}_\omega = \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{Kugelwelle}} \underbrace{\int d^3r' \, \vec{j}_\omega(\vec{r}\,') \, e^{-ik\vec{e}_r \cdot \vec{r}\,'}}_{\text{Geometriefaktor legt Abstrahlrichtg. fest}}$$



$$\vec{B}_\omega = \vec{\nabla} \times \vec{A}_\omega$$

$$\vec{E}_\omega = -\vec{\nabla} \phi_\omega + i\omega \vec{A}_\omega$$

betrachte nur 1 ω - Komponente, am Ende Summe bilden

$$\phi_\omega = ? \quad \text{Lorenzbedingg} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega = \frac{i\omega}{c^2} \phi_\omega$$

$$\vec{E}_\omega = i \frac{c^2}{\omega} \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\omega + i\omega \vec{A}_\omega$$

→ alles auf $\vec{A}_\omega$ zurückgeführt

Fernfeld: Kugelkoordinaten wählen

$$\vec{\nabla} = \Big(\underbrace{\partial_r}_{\sim e^{ikr}k},\ \underbrace{\tfrac{1}{r}\partial_\vartheta,\ \tfrac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi}_{\sim \frac{1}{r} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0}\Big) \equiv \underbrace{\vec{e}_r\,\partial_r}$$

überlebt im Fernfeld wenn Terme $\sim k$ mitgenommen werden

nur Terme proportional zu k mitnehmen

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\omega \approx ik\,(\vec{e}_r\cdot\vec{A}_\omega)$$

$$\vec{\nabla}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\omega \approx (ik)^2\,\vec{e}_r\,(\vec{e}_r\cdot\vec{A}_\omega)$$

$$\vec{E}_\omega = -i\omega\,\underbrace{\big(\vec{e}_r(\vec{e}_r\cdot\vec{A}_\omega) - \vec{A}_\omega\big)}_{-\vec{A}_\omega^{\perp}} =$$

$$\vec{A}_\omega^{\perp} = \big(\vec{A}_\omega - \vec{e}_r(\vec{e}_r\cdot\vec{A}_\omega)\big) = \vec{A}_\omega - \vec{A}_\omega^{\parallel}$$

vom vollen $\vec{A}_\omega$-Feld wird der Anteil in Richtg. der Ausbreitg. ($\vec{e}_r$) abgezogen)

$A^\perp$ stellt sicher, daß das Feld nur transversale Anteile enthält!

$$\boxed{\rightarrow \vec{E}_\omega(\vec{r}) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\, \vec{j}^{\perp}_\omega(\vec{r}')\, e^{-ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}'}}$$

beobachtbare Größe ist $\vec{E}$ Feld

und wird durch den transversalen Strom $\vec{j}^{\perp}$ bestimmt.

10.4. Strahlungsfeld eines elektrischen Dipols

starte v. $\vec{A}$-Feld, rechnen dann ins E-Feld um

$$\vec{A}_\omega(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\, \vec{j}_\omega(\vec{r}')\, \underbrace{e^{ik\vec{e}_r\cdot\vec{r}'}}_{\approx 1}$$

$$k\,|\vec{r}'| = \frac{|\vec{r}'|}{\lambda} \ll 1$$

führt auf elektrische Dipolstrahlung

partielle Integration

$$\int d^3r'\, \vec{j}_\omega(\vec{r}') \overset{\checkmark}{=} \int d^3r' \underbrace{\sum_{\alpha,\beta} \vec{e}_\beta\, \partial_\alpha x'_\beta\, j_{\omega\alpha}}_{\sum_{\alpha,\beta} \vec{e}_\beta\, \delta_{\alpha\beta}\, j_{\omega\alpha}} (\vec{r}')$$

zu zeigen, daß dies ein Dipolmoment ist

$$\sum_{\alpha,\beta} \vec{e}_\beta\, \delta_{\alpha\beta}\, j_{\omega\alpha} = \sum_\alpha \vec{e}_\alpha\, j_{\omega\alpha} = \vec{j}_\omega(\vec{r})$$

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \partial_t \rho = 0\right)$$

$$= \int d^3r \left(-\vec{r}\,' \underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_\omega(\vec{r}\,')} \right)$$

$$= \int d^3r \; -\vec{r}\,' \left(+i\omega \rho_\omega(\vec{r}\,') \right)$$

$$= -i\omega \underbrace{\int d^3r' \, \vec{r}\,' \rho_\omega(\vec{r}\,')}$$

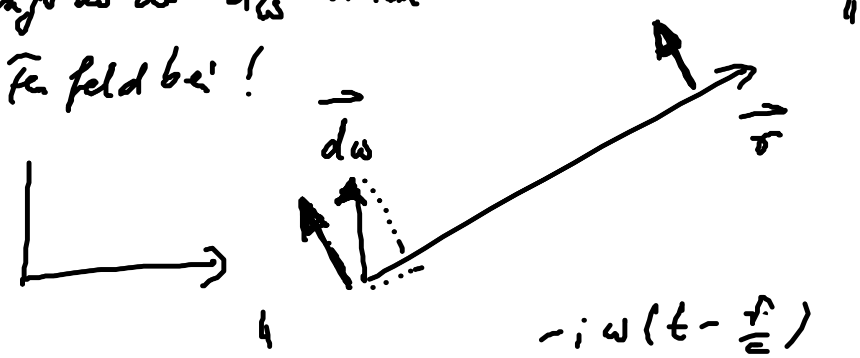
$\vec{d}_\omega$: Dipolmoment der Ladungsverteilung $\rho_\omega(\vec{r})$

$$\boxed{\downarrow \quad \vec{A}_\omega(\vec{r}) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi}\vec{d}_\omega \frac{e^{ikr}}{r}}$$

Vektorpotential d. elektrischen Dipols

$$\downarrow \quad \vec{E}_\omega(\vec{r}) = -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi}\left(\underbrace{\vec{e}_r(\vec{e}_r\cdot\vec{d}_\omega) - \vec{d}_\omega}\right)\frac{e^{ikr}}{r}$$

es trägt nur der $\vec{d}_\omega^{\perp}$ Anteil im Fernfeld bei!



Gesamtlösung:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_\omega -\frac{\mu_0\omega^2}{4\pi}\left(\vec{e}_r(\vec{e}_r\cdot\vec{d}_\omega) - \vec{d}_\omega\right)\frac{e^{\overbrace{i\frac{\omega}{c}r - i\omega t}^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}}}{r}$$

$$\omega^2 \to -\partial_t^2 \quad = \frac{\mu_0}{4\pi}\, \partial_t^2 \left(\vec{e}_r \; \vec{e}_r \cdot \vec{d}\left(t - \frac{r}{c}\right) - \vec{d}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \frac{1}{r}$$

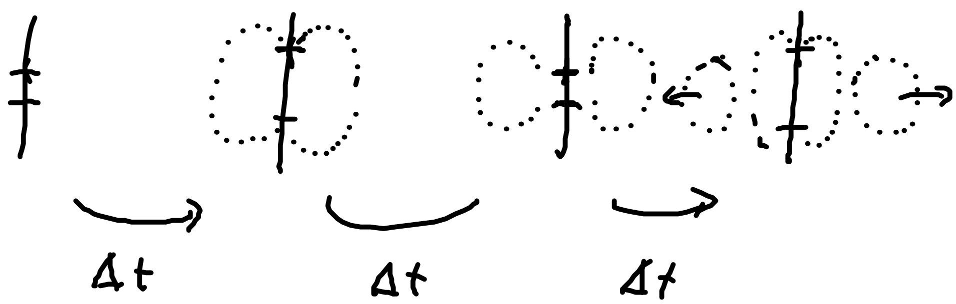
Bemerkungen:

a/ Dipolstrahlg. aufgrund v. $\ddot{\vec{d}}$, dh. beschleunigte Bewegung

b/ man erkennt Zeitverzögerung

c/ man erkennt $\tilde{E} \sim \frac{1}{r}$

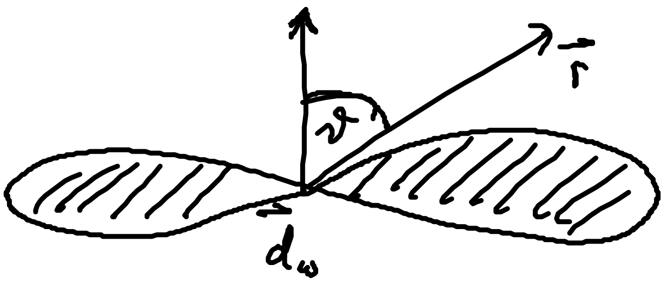
d/ Zeitablauf:



e/ Energiestrom $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \vec{B}\, \frac{1}{\mu_0}$

analoge Rechg. zu beschleunigter Punktladung

$$\vec{S} \sim \vec{e}_r \sin^2\vartheta \; d_\omega^2$$



maximale Ab-
strahlg $\perp$
zu Dipolbewegg.