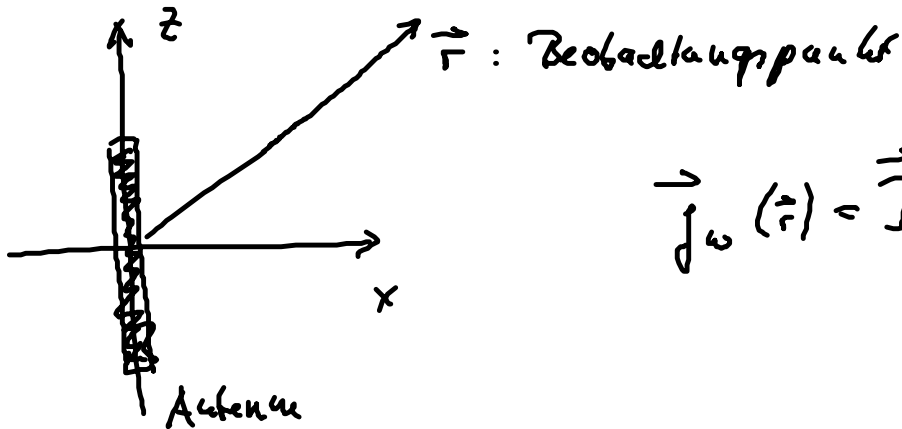


10.5. Lineare Antennen

Strahlung, die von einem dünnen, stromführenden Leiter erzeugt wird (makroskopischer Strom $\vec{j}_\omega = \vec{j}$)

$\vec{I}_\omega(z)$ sei Fourierkomponente des Stroms im Leiter



$$\vec{j}_\omega(\vec{r}) = \vec{I}_\omega(z) \delta(x) \delta(y)$$

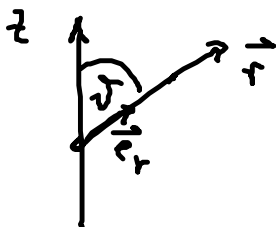
"dünne Antenne"

Abgestrahltes Fernfeld:

$$\vec{E}_\omega(\vec{r}) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{Kugelwelle}} \int d\vec{r}' \underbrace{\vec{j}_\omega(\vec{r}') e^{-i \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{r}'}_k}}_{\text{Fourierfeld}}$$

$$k \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{r}'}_{\text{Fourierfeld}} = k r' \cos \vartheta$$

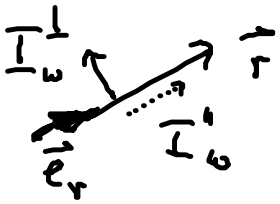
$$(ck = \omega)$$



$2L = \text{Gesamtlänge der Antenne}$

$$\int d^3 r' \frac{\vec{r}}{r} \left(\frac{z'}{r'} \right) = \int_{-L}^L dz' \underbrace{\vec{I}_\omega(z')}_{\substack{\text{die um } A \text{ herum} \\ 1}} \int dx \int dy \delta(x') \delta(y')$$

$$\vec{I}_\omega^\perp(z') = \vec{I}_\omega(z') - \underbrace{\vec{e}_r \left(\vec{e}_r \cdot \vec{I}_\omega(z') \right)}_{\vec{I}_\omega^0}$$



$$= \vec{I}_\omega(z') - \vec{e}_r \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{I}_\omega(z')}{r} \right) \quad \vec{I}_\omega = I_\omega \vec{e}_z$$

$$\vec{r} \cdot \vec{e}_z = r \cos \vartheta$$

$$= \vec{I}_\omega(z') - \vec{e}_r I_\omega(z') \cos \vartheta$$

$$= I_\omega(z') \vec{e}_z - I_\omega(z') \cos \vartheta \vec{e}_r$$

Übergang in kartesische Koordinate

am $\frac{\vec{r}}{r}$ in Kugelkoordinaten

$$= I_\omega \cdot (0, 0, 1) - I_\omega \cos \vartheta (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$$

$$= I_\omega \left(-\sin \vartheta \cos \varphi \cos \vartheta, -\sin \vartheta \sin \varphi \cos \vartheta, 1 - \cos^2 \vartheta \right)$$

$$= -\bar{I}_0 \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta$$

↑
Darstellg. v. \vec{e}_ϑ in Kugelkoordinaten

$$\vec{E}_\omega = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{-L}^L dz' \bar{I}_\omega(z') e^{-ikz' \cos \vartheta} \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta$$

Berechnung eines durch eine Antenne im Fernfeld

Strom? hängt ab v. Antennenspannung (Spannung) und Geometrie d. Antenne

Strom (o.B.) im ∇^2 Helmholtzgleichg. mit

Randbedingungen erfüllt:



$$\frac{d^2}{dz^2} \bar{I}_\omega(z) = -k^2 \bar{I}_\omega(z)$$

unrealistisches Beispiel: konstanter Strom $\bar{I}_\omega(z) \equiv \bar{I}_0$

$$\vec{E}_\omega = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{-k \cos \vartheta} \sin(kL \cos \vartheta) \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta$$

$$\overline{E_{angie}} \sim |\overline{E_{\omega}}|^2 \propto \frac{\tan^2 \vartheta \sin^2(kL \cos \vartheta)}{r^2}$$

↑
Intensitätsquadrat

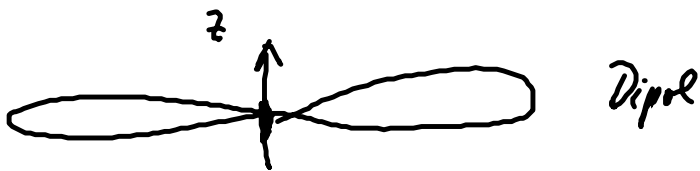
Bemerkungen:

a) Intensität $\sim \frac{1}{r^2}$ typ. Zeichen einer abgeleiteten Stelle

b) \exists eine Abstrahlcharakteristik die von ϑ abhängt (komplexiert)

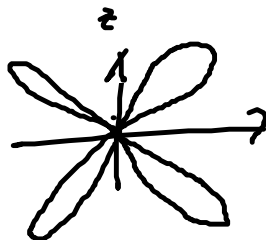
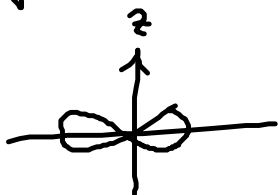
c) sehr klein Antennen: $kL \rightarrow 0$ ($L \rightarrow 0$)

$$\text{Intensität} \propto \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta} (kL \cos \vartheta)^2 = (kL)^2 \sin^2 \vartheta$$



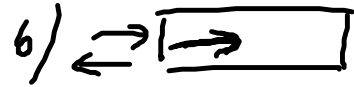
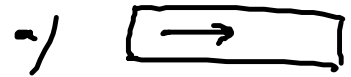
d) $kL = 2\pi \frac{L}{\lambda}$ als Abhängig. kL kann groß sein

f. höherer Ordnung \rightarrow



11. Ausbreitung ebener Wellen in Materie

Freuzfläche und Fresnelsche Formeln



11.1. Wellengleichung in Medien

unendlich ausgedehnte Medien, Freuzfläche spielt keine Rolle

$$(1) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \partial_t \vec{B}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_a + \partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \right) + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

μ₀-Ladungsstrom Dichte

$$(1) \quad \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = - \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$\left(\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot - \Delta \right) \vec{E} \stackrel{(2)}{\downarrow} = - \mu_0 \left(\partial_t \vec{j}_a + \partial_t^2 \vec{P} + \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{M} \right) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

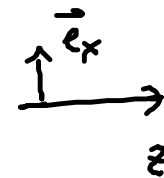
Wellengleichung in Medien:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \right) \vec{E} = \mu_0 \left(\partial_t \vec{j}_a + \partial_t^2 \vec{P} + \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{M} \right)$$

homogener Anteil

Quelle d. \vec{E} -Felds

(Leitfähigkeit, Dielektrizität, Magnetisierbarkeit)

feld: ebene Wellen: $\vec{E}(z) e^{ikz} \vec{e}_x$: 

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{gilt f. nicht stat. fortgesetztes Felds})$$

11.2. Mikroskopische Ursprung d. Brechzahl

Dichtheit (\vec{P}), 1 Komplette: x-Komplette d. Felds

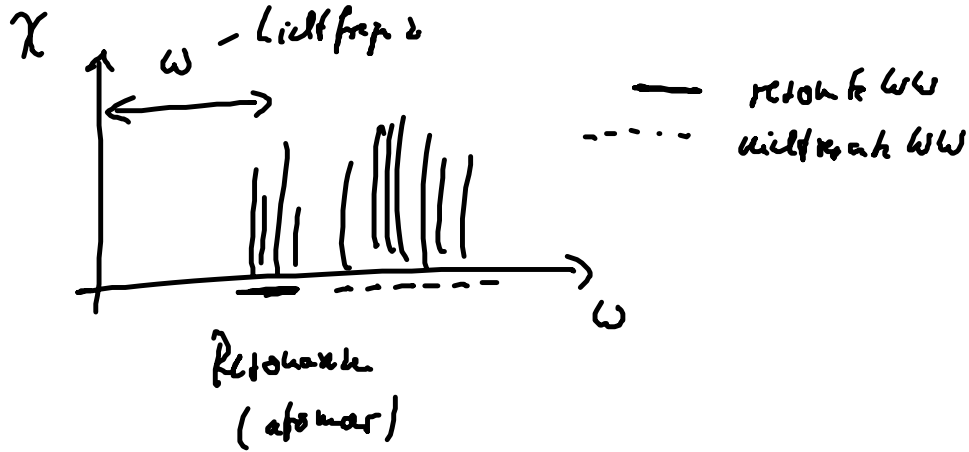
Ausatz: $\vec{P}_\omega = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}_\omega$

↑
Suszeptibilität, wird gleich betrachtet,
ist f. linear Opt. allgemein gültig
(ohne räumliche Dispersion)

$$\nabla_z^2 \vec{E}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_\omega = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}_\omega = \underline{\underline{\mu_0 \omega^2 \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}_\omega}}$$

$$\left(\nabla_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \underbrace{(1 + \chi(\omega))}_{n^2(\omega)} \right) \vec{E}_\omega = 0$$

Brechzahl, frequenzabhängig



11.3. Ausbreitung ebener Wellen in Medien

Wir verwenden (positive z -Richtung)

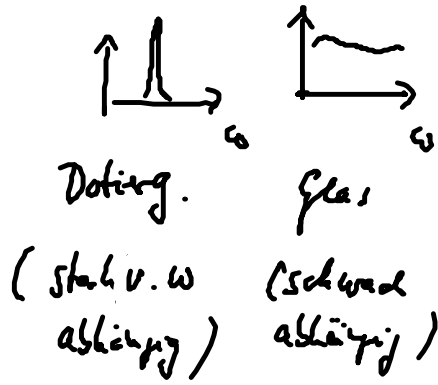
$$\bar{E}(z, t) = \sum_{\omega} \underbrace{\bar{E}_{\omega}^0 e^{\pm i \frac{\omega}{c} u(\omega) z}}_{\text{erfüllt Wgl. in } \omega\text{-Raum}} \underbrace{e^{-i\omega t}}_{\text{Rücklauf in } z\text{-Raum}} = \sum_{\omega} \bar{E}_{\omega}^0 e^{-i\omega \left(t - \frac{z}{c_n(\omega)} \right)}$$

\bar{E}_{ω}^0 - Anfangsbedingung auf Wellenpaket in Ω_H

c_n : Lichtgeschw. im Medium $\frac{c}{u(\omega)} \equiv c_n(\omega)$

Wellenausbreitung in Dichtem wird durch Brechzahl beeinflusst

$$n = \sqrt{1 + \chi} = \sqrt{1 + \chi_r + \chi_{ur}}$$



$$\chi_{ur} \gg \chi_r$$

$$u \approx \sqrt{1 + \chi_{ur}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\chi_r}{1 + \chi_{ur}} \right) = u_{ur} + \frac{1}{2} \frac{\chi_r}{u_{ur}}$$

1. Ordng Taylor der $\sqrt{\quad}$

für $z=0$ $\therefore E_{\omega}^0$ vorgeben

$$E_{\omega} = E_{\omega}^0 e^{i \frac{\omega}{c} u(\omega) z - i \omega t}$$

$$|E_{\omega}|^2 = |E_{\omega}^0|^2 e^{-\frac{\omega}{c u_{ur}} \text{Im}(\chi_r) z}$$

$$u_{ur} = \text{reell}, \quad \chi_r = \text{komplex.}$$

Lambert-Beer'sche
Absorpt. gesetz

$$|E_{\omega}|^2 = |E_{\omega}^0|^2 e^{-kz}$$

$$k = \frac{\omega}{c u_{ur}} \text{Im} \chi_r$$

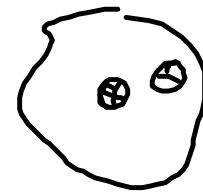
inverse Absorpt. Länge

wo anwendbar?

a) Dichtlith.

$$P_{\omega} = \epsilon_0 \chi(\omega) \bar{E}_{\omega}$$

Feldstärke



1 Elektron atom

$$\ddot{P}(z,t) + \gamma_0 \dot{P}(z,t) + \omega_0^2 P(z,t) = u_0 \frac{q^2}{m} E(z,t)$$

Materialgr. f. Dielek. (Pipoldiekt.)

$$\chi(\omega) = \frac{q^2 u_0}{m \epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i\omega \gamma_0}$$

$$\text{an } P_{\omega} = \epsilon_0 \chi(\omega) \bar{E}_{\omega}$$

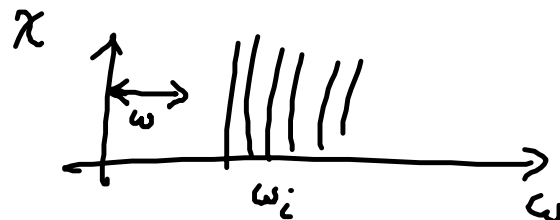
Mehrere atom_i " (viele Oszillatoren) γ_i - Dämpfung

$$\chi(\omega) = \sum_i \frac{q^2 u_0}{m \epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_i^2 - i\omega \gamma_i}$$

q - El-Ladg.
 m - El-Masse

i : Nummer der El.ther / Oszillatoren

(i) nichtresonante Beibug:



$$\omega_i \gg \omega$$

$$\chi_{nr}(\omega) = \sum_i \frac{q^2 u_0}{m \epsilon_0 \omega_i^2} = \text{konstant}$$

$$n_{nr} = \sqrt{1 + \chi_{nr}} \approx \text{konstant}$$

→ konstant bzw schwach v. ω abhängige Brechzahl

(ii) resonanter Beibug

Einduktion / 1 SE-Übergang

$$\chi(\omega) = \frac{q^2 u_0}{m \epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i \omega \gamma_0}$$

$$\omega \approx \omega_0 \rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 \approx \underbrace{(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)}_{\approx 2\omega_0}$$

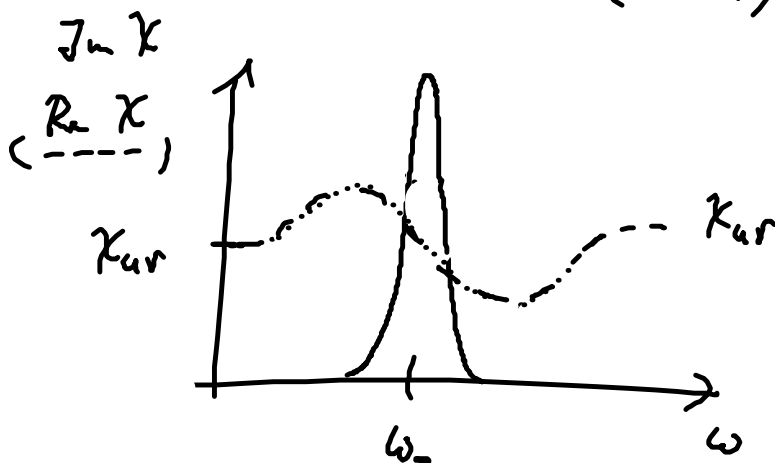
$$\chi(\omega) \approx \frac{q^2 u_0}{m \epsilon_0 2\omega_0} \frac{1}{(\omega_0 - \omega) - i \frac{\gamma_0}{2}}$$

Auffall in \mathbb{R} / \mathbb{Im}

$$\chi_r(\omega) = \frac{q^2 u_0}{2m \epsilon_0 \omega_0} \frac{i \frac{\gamma_0}{2} + (\omega_0 - \omega)}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma_0^2}{4}}$$

reson. Brechzahl hat Imaginärteil $\approx \frac{\gamma_0}{2}$

$$\frac{\gamma_0}{2} \overbrace{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\gamma_0^2}{4}}$$



- Im χ ist korrelativ gepaart
- Re χ zeigt ein sogenanntes Dispersionsverhalten
- Im $\chi \sim \kappa \sim \rho_0 \rightarrow$ man erhält Absorption durch die Dämpfung der Elektronen im Dielektrikum

b) Metalle

Leitfähigkeit über Strom j_m beschreibt
+ ohmsche Verluste

Trick: $j_m \equiv \partial_t P$

$$P_\omega = \epsilon_0 \chi(\omega) \bar{E}_\omega \stackrel{\text{Metalle?}}{=} ?$$

$$j_m \omega = \sigma(\omega) \bar{E}_\omega, \quad j_m \omega = -i\omega P_\omega$$

$$\sigma(\omega) = -i\omega \epsilon_0 \chi(\omega)$$

χ f. Metalle? $\omega_0 \rightarrow 0$ (kein rüd. getrieb. Kraft f. Metallstrom)

Spezialfall: $\rho_0 = 0$

(überraschend!)

$$\chi_{\text{Metall}} = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad \omega_{pe}^2 = \frac{q^2 n_0}{m \epsilon_0}$$

Plasma freq ω_{pe}

$$u = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^{1/2}, \text{ f. } \omega < \omega_{pe} :$$

$$|E_{\omega}|^2 = \bar{E}_0^2 e^{-2\frac{\omega}{c} \text{Im}(u) z}$$

$$= \bar{E}_0^2 e^{-\frac{2z}{c} \sqrt{\omega_{pe}^2 - \omega^2}}$$

Welle klingt ab auf ohne Dämpfung d.

Metallelektrom : es wird ungedämpfte

Plasma-schwingung in Metall erzeugt und

diese entziehen dem Feld die Energie.